Rumores Estocásticos

Arturo Valdivia

Seminari Informal de Matemàtiques de Barcelona

22 de noviembre de 2011

Resumen

En el espíritu del SIMBa (manteniendo un aire divulgativo, informal e interdisciplinario) repasaremos viejos y nuevos problemas en el área de la probabilidad, presentando conexiones entre la probabilidad y otras áreas de la matemática. Como hilo conductor de la presentación usaremos algunos problemas aplicados procedentes de las áreas de *Control Estocástico, Engrosamiento de Filtraciones*, *Filtrado de Señales*, *Grafos Aleatorios* y *Riesgo de Crédito*. En el camino abordaremos algunos aspectos esenciales en la construcción de la *integral -estocástica- de Itô*, haciendo un paralelismo con la integral -determinista- de Lebesgue.

¿Qué estudio? Bueno, a grandes rasgos

estudio sucesiones de la forma

$$\{\pi_t(X) := \mathbb{E}^*[X \,|\mathcal{F}_t], \qquad t \in [0, T]\}$$

donde

$$\mathbb{E}^*[\,\cdot \mid \mathcal{F}_t] \qquad \text{es } \textit{cierta} \text{ aplicación lineal}$$

y cada término tiene una interpretación

- en términos de información,
- financiera

Sobre el título

- *Rumor*: ruido confuso de voces...
- *Estocástico*: azaroso, aleatorio...

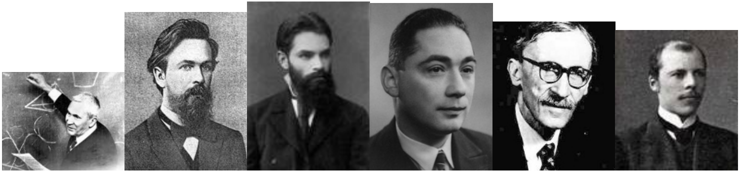
Sobre el título

- *Rumor*: ruido confuso de voces...
- *Estocástico*: azaroso, aleatorio...

"I love rumors! Facts can be so misleading, where rumors, true or false, are often revealing."

Problema Central: Teorema del Limite

Cauchy, Gauss, Laplace, Chebyshev,



Kolmogorov, Markov, Lyapunov, Feller, Lévy, Lindenberg

Teorema del Limite y la universilidad

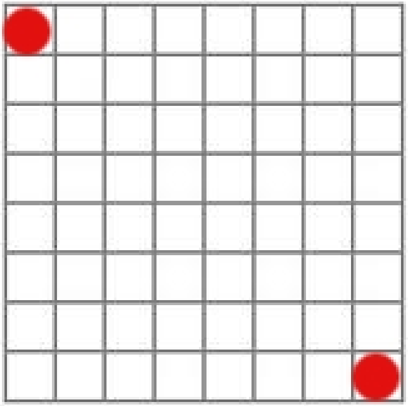
Theorem

If $(X_n)_{n\geq 1}$ *is a sequence of i.i.d. r.v., then*

$$\sqrt{n}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - \mathbb{E}[X_1]\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \mathbb{E}[X_1^2]).$$

Un ejemplo de invariantes

¿Se puede cubrir el tablero de 8x8 con 31 fichas de 2x1 si quitamos las esquinas rojas?

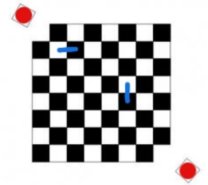


No es posible

"Hazte un esquema y si se tercia ... píntalo en colores" (-Miguel de Guzmán)

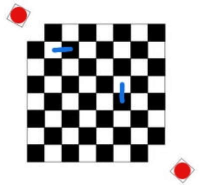
No es posible

"Hazte un esquema y si se tercia ... píntalo en colores" (-Miguel de Guzmán)



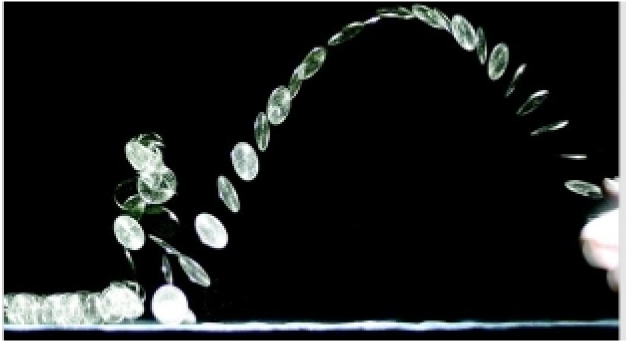
No es posible

"Hazte un esquema y si se tercia ... píntalo en colores" (-Miguel de Guzmán)



1. Cada ficha de 2x1 ocupa un cuadrado negro y uno blanco
2. Por lo tanto las 31 fichas ocupan 31 cuadrados negros y 31 cuadrados blancos
3. ¡Pero sólo hay 30 cuadrados blancos!

Simbiósis Combinatoria-Probabilidad-T. de la Medida



Erdős–Rényi Grafos aleatorios

$\sim$ 1960 Erdős–Rényi propusieron una nueva manera de estudiar grafos

Erdős–Rényi Grafos aleatorios

$\sim$ 1960 Erdős–Rényi propusieron una nueva manera de estudiar grafos

$$G_n(M) = \{\text{Grafo de } n \text{ vértices y } M \text{ arístas}\}$$

- Cada grafo tiene la misma probabilidad de "surgir".

Erdős–Rényi Grafos aleatorios

$\sim$ 1960 Erdős–Rényi propusieron una nueva manera de estudiar grafos

$$G_n(M) = \{\text{Grafo de } n \text{ vértices y } M \text{ arístas}\}$$

- Cada grafo tiene la misma probabilidad de “surgir”.
- Nos interesa probar la existencia de grafos con alguna caracterísitca Q.

Erdős–Rényi Grafos aleatorios

$\sim$ 1960 Erdős–Rényi propusieron una nueva manera de estudiar grafos

$$G_n(M) = \{\text{Grafo de } n \text{ vértices y } M \text{ arístas}\}$$

- Cada grafo tiene la misma probabilidad de "surgir".
- Nos interesa probar la existencia de grafos con alguna caracterísitca Q.
- O bien, cuándo $(N > n)$ debería manisfestarse Q.

Erdős–Rényi Grafos aleatorios

$\sim$ 1960 Erdős–Rényi propusieron una nueva manera de estudiar grafos

$$G_n(M) = \{\text{Grafo de } n \text{ vértices y } M \text{ arístas}\}$$

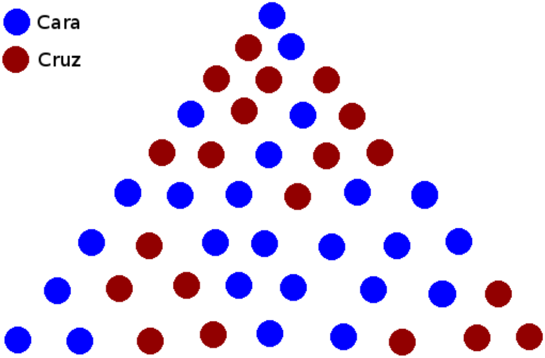
- Cada grafo tiene la misma probabilidad de "surgir".
- Nos interesa probar la existencia de grafos con alguna caracterísitca Q.
- O bien, cuándo $(N > n)$ debería manisfestarse Q.
- Algo curioso: Q tiende a tener una ley del tipo 1-0

Stas Smirnov y la Invarianza Conforme

- Stas Sminov (Oro en IMOs '86 y '87; Fields 2010)
  - Probabilidad, Sistemas Dinámicos, Física Estadística, ...
- Prueba rigurosa sobre invarianza conforme en modelos latiz.
  - La fórmula de Cardy es una consecuencia

Un problema más reciente con monedas

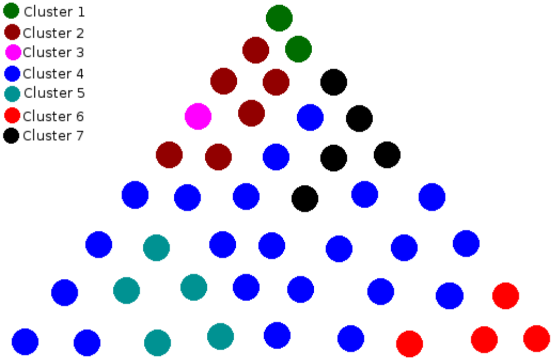
Formamos un arreglo triangular lanzando *monedas justas*



Una moneda es *justas* si $\mathbb{P}\{\text{cae cara}\} = \mathbb{P}\{\text{cae cruz}\} = \frac{1}{2}$

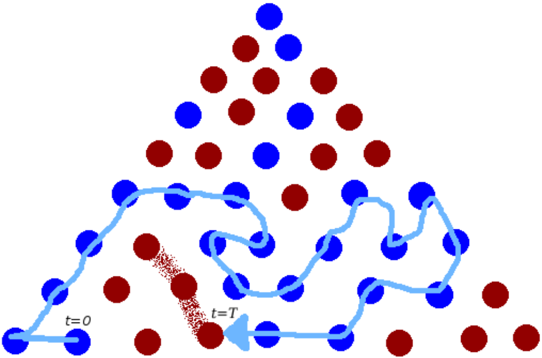
Algunas preguntas (de la Teoría de Percolación)

- ¿Qué características geométricas (forma, tamaño, etc...) tienen estos *clusters*?
- Sobre todo, ¿qué pasa cuando hay *muchas* monedas?



Un paseo aleatorio, azul y sin cruces

¿Con qué probabilidad, p, choca contra una barrera roja?



Probabilidad Libre

Recordemos que la esperanza satisface $\mathbb{E}$

- $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$
- $\mathbb{E}[1] = 1$
- $X \perp Y \Longrightarrow \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[Y]$
- El estudio de polinomios $\mathbb{E}[X^n]$ caracteriza a X

Probabilidad Libre

Recordemos que la esperanza satisface $\mathbb{E}$

- $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$
- $\mathbb{E}[1] = 1$
- $X \perp Y \Longrightarrow \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[Y]$
- El estudio de polinomios $\mathbb{E}[X^n]$ caracteriza a X

$$\text{Generalización} \begin{cases} \text{Nuevas interpretaciones para } \mathbb{E} \\ \\ \text{Funcionales lineales más generales } \varepsilon \end{cases}$$

Probabilidad libre

Definition

Un espacio de probabilidad es una pareja $(\mathcal{A}, \varepsilon)$ donde $\mathcal{A}$ es *cierta* C^*-álgebra y es *cierta*$\varepsilon : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal tal que

$$\varepsilon(1_{\mathcal{A}}) = 1.$$

Los elementos $a \in \mathcal{A}$ son las variables aleatorias y pueden tener independientes en nuevos sentidos

$$\begin{aligned}
\textit{Tensorial } \varepsilon(a_1^{n_1} \bigotimes \ldots \bigotimes a_k^{n_k}) &= \varepsilon(a_1^{n_1}) \ldots \varepsilon(a_k^{n_k}) \\
\textit{Booleana } \varepsilon(a_1^{n_1} \diamondsuit \ldots \diamondsuit a_k^{n_k}) &= \varepsilon(a_1^{n_1}) \ldots \varepsilon(a_k^{n_k}) \\
\textit{Libre } \varepsilon(a_1^{n_1} \star \ldots \star a_k^{n_k}) &= 0
\end{aligned}$$

Teoremas Límites Libres

Si $a_1, \dots, a_N$ son variables aleatorias idénticamente distribuidas, con media 0, varianza σ^2, e independientes

$$\lim_{N\to\infty} \varepsilon\left[\left(\frac{a_1 + \dots + a_N}{\sqrt{N}}\right)^{2k}\right] = \begin{cases} \frac{(2k)!}{2^k k!}\sigma^{2k} & (\textit{tensorial}) \\ \sigma^{2k} & (\textit{booleano}) \\ \frac{\binom{2k}{k}}{k+1}\sigma^{2k} & (\textit{libre}) \end{cases}$$

Una reflexión sobre *estado actual* de la probabilidad

*"Hace unos 40 años se podía escribir **un libro** con todo lo que hace falta saber sobre la probabilidad (cf. Loève).*

*Sin embargo, los desarrollos susecuentes han sido exposivos y hoy en día haría falta **una biblioteca**.*

La especialización de las investigaciones han dado lugar a docenas de sub-ramas de la probabilidad."

Olav Kallenberg

Otras ramas de la probabilidad

- Branching and superprocesses
- *Free probability*
- Free stochastic calculus
- Gibbs and Palm measures
- Interacting particle systems
- Large deviations
- *Malliavin calculus*
- Measure-valued diffusions
- Random matrix theory
- *Random Graphs*
- Stochastic differential geometry
- *Stochastic partial differential equations*
- Quantum probability

Procesos Estocásticos (*en casa*)

Definition

Un *proceso estocástico* es una sucesión $(X_i)_{i \in I}$ de la forma

$$((\Omega, \mathcal{F}), \mathbb{P}) \xrightarrow{X_i} \mathcal{R}, \qquad i \in I$$

donde

$(\Omega, \mathcal{F})$	espacio medible
$\mathbb{P}$	medida finita
$\mathcal{R}$	espacio de valores
X_i	aplicación $\mathbb{P}-$medible

Procesos Estocásticos (*en la calle*)

Modelan evolución de características de fenómenos aleatorios:

Procesos Estocásticos (*en la calle*)

Modelan evolución de características de fenómenos aleatorios:

- Información de la señal recibida

Procesos Estocásticos (*en la calle*)

Modelan evolución de características de fenómenos aleatorios:

- Información de la señal recibida
- Valor de mis acciones

Procesos Estocásticos (*en la calle*)

Modelan evolución de características de fenómenos aleatorios:

- Información de la señal recibida
- Valor de mis acciones
- Expansión del rumor/epidemia

Procesos Estocásticos (*en la calle*)

Modelan evolución de características de fenómenos aleatorios:

- Información de la señal recibida
- Valor de mis acciones
- Expansión del rumor/epidemia
- Cantidad de bacterías en el cultivo

Procesos Estocásticos (*en la calle*)

Modelan evolución de características de fenómenos aleatorios:

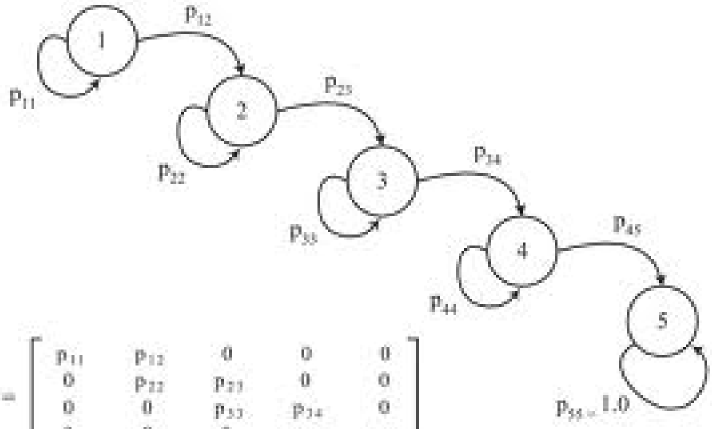
- Información de la señal recibida
- Valor de mis acciones
- Expansión del rumor/epidemia
- Cantidad de bacterías en el cultivo
- Posición de una partícula

Procesos Estocásticos (*en la calle*)

Modelan evolución de características de fenómenos aleatorios:

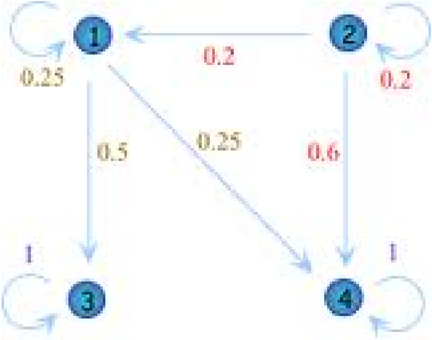
- Información de la señal recibida
- Valor de mis acciones
- Expansión del rumor/epidemia
- Cantidad de bacterías en el cultivo
- Posición de una partícula
- La cantidad de recorridos Hamilitonianos en un grafo

Cadena de Markov

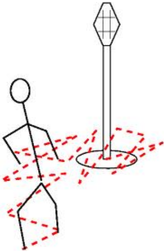


$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & p_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} & p_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & p_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Cadena de Markov



Proceso de Wiener / Moviemiento Browniano



Lo podemos pensar como el límite de paseo aleatorio

Proceso de Wiener / Moviemiento Browniano

Definition

El proceso $(B_t)_{t\in[0,T]}$ es un *movimiento Browniano* si

(1) Sus distribuciones conjuntas son Gaussianas

(2) $\mathbb{E}[B_t] = 0$

(3) $\mathbb{E}[B_t B_s] = min\{s,t\}$

Proceso de Wiener / Moviemiento Browniano

Definition

El proceso $(B_t)_{t\in[0,T]}$ es un *movimiento Browniano* si

(1) Sus distribuciones conjuntas son Gaussianas

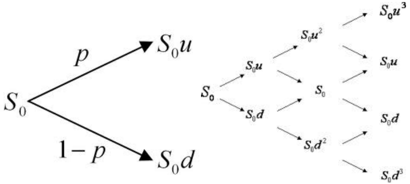
(2) $\mathbb{E}[B_t] = 0$

(3) $\mathbb{E}[B_t B_s] = min\{s, t\}$

Algunas propiedades importantes sobre sus trayectorias

- Continuidad: el mapa $t \mapsto B(t, \omega)$ es continuo (c.s.)
- No diferenciabilidad: $t \mapsto B(t, \omega)$ no es diferenciable en todo punto (c.s.)

Proceso de Wiener / Moviemiento Browniano



Observaciones

La disciplina ambiente del fenómeno descrito por $(X_i)_{i \in I}$ propicia una interacción entre la probabilidad y dicha disciplina

Observaciones

La disciplina ambiente del fenómeno descrito por $(X_i)_{i \in I}$ propicia una interacción entre la probabilidad y dicha disciplina

- Probabilidad - Teoría de Señales
- Probabilidad - Finanzas/Economía
- Probabilidad - Antropología/Epidemiología
- Probabilidad - Ecología
- Probabilidad - Física
- Probabilidad - Teoría de Grafos
- Probabilidad - Sistemas Dinámicos

Observaciones

Si estos procesos pueden describirse con *ecuaciones diferenciales* ***estocásticas***

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}X_t &= \alpha_t \mathrm{d}t + \beta_t \mathrm{d}L_t \\
&= \alpha_t \mathrm{d}t + \gamma_t \mathrm{d}W_t + \delta_t \mathrm{d}J_t
\end{aligned}
$$

Observaciones

Si estos procesos pueden describirse con *ecuaciones diferenciales* ***estocásticas***

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}X_t &= \alpha_t \mathrm{d}t + \beta_t \mathrm{d}L_t \\
&= \alpha_t \mathrm{d}t + \gamma_t \mathrm{d}W_t + \delta_t \mathrm{d}J_t
\end{aligned}
$$

Hacen falta

- Cálculo Integral **Estocástico**
- Cálculo Diferencial **Estocástico**
- Geometría Diferencial **Estocástica**

Aparición de SDEs y *ruido estocástico*

Cuando una señal/mensaje f se mueve en un medio ruidoso

$$\frac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t} = f(t) + \text{"}\textit{ruido estocástico}\text{"}$$

Aparición de SDEs y *ruido estocástico*

Cuando una señal/mensaje f se mueve en un medio ruidoso

$$\frac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t} = f(t) + \text{"}\textit{ruido estocástico}\text{"}$$

Ejemplos

(1) Una señal de radio

Aparición de SDEs y *ruido estocástico*

Cuando una señal/mensaje f se mueve en un medio ruidoso

$$\frac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t} = f(t) + \text{"}\textit{ruido estocástico}\text{"}$$

Ejemplos

(1) Una señal de radio

(2) La acción $(X_t)_{t\geq 0}$ un participante de mercado, dentro de toda la oferta-demanda $(Y_t)_{t\geq 0}$

$$Y_t = X_t + \text{"}\textit{ruido estocástico}\text{"}$$

¿Aplicaciones de estos modelos?

- Eficiencia de Telecomunicaciones

¿Aplicaciones de estos modelos?

- Eficiencia de Telecomunicaciones
- Detección de *Insider Trading*

¿Aplicaciones de estos modelos?

- Eficiencia de Telecomunicaciones
- Detección de *Insider Trading*
- ...

¿Aplicaciones de estos modelos?

- Eficiencia de Telecomunicaciones
- Detección de *Insider Trading*
- ...
- Poner a prueba / Enriquecer / Extender la "teoría"

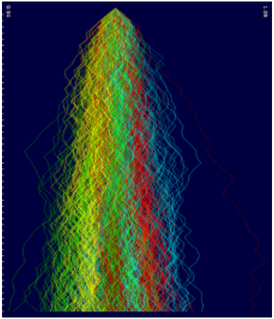
Noise Traders

White Noise y Luz Blanca

Itô y el movimiento Browniano

- Aunque ya "se tenian" modelos informales de SDEs
- (∼1944) Itô propuso definir la derivada $\mathrm{d}B_t$ como "white noise"$\cdot\mathrm{d}t$. Así, en las SDEs anteriores

$$\mathrm{d}X_t = \alpha_t \mathrm{d}t + \beta_t \mathrm{d}B_t$$



La esperanza condicionada $\mathbb{E}[\cdot|\mathcal{H}]$

Sea $\mathcal{H} \leq \mathcal{F}$. Consideremos cierto mapa

$$\mathbb{E}[\cdot|\mathcal{H}] \; : \; (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\Omega, \mathcal{H})$$

que satisfaga

1. $\mathbb{E}[aX + bY|\mathcal{H}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{H}] + b\mathbb{E}[Y|\mathcal{H}]$
2. $X \in \mathcal{H} \Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{H}] = X$
3. $X \perp \mathcal{H} \Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X]$
4. $\mathcal{H} \leq \mathcal{G} \Rightarrow \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\,\mathcal{H}\right] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$
5. $\varphi(\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)|\mathcal{H}]$ (Desigualdad de Jensen)
6. $0 \leq X_n \nearrow X \Rightarrow \mathbb{E}[X_n|\mathcal{H}] \nearrow \mathbb{E}[X_n|\mathcal{H}]$ (Conv. Monótona)
7. ...

Con las primeras propiedades

1. $\mathbb{E}[aX + bY|\mathcal{H}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{H}] + b\mathbb{E}[Y|\mathcal{H}]$
2. $X \in \mathcal{H} \Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{H}] = X$
3. $X \perp \mathcal{H} \Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X]$
4. $\mathcal{H} \leq \mathcal{G} \Rightarrow \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\,\mathcal{H}\right] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$

podemos hacer un modelo para ganar intuición sobre $\mathbb{E}[\cdot|\mathcal{H}]$:

- en términos geométricos
- en términos de información

$\mathbb{E}[\cdot|\mathcal{H}]$ en términos geométricos

- Podemos pensar $\mathbb{E}[\cdot|\mathcal{H}]$ como una proyección ortoganal

$\mathbb{E}[\cdot|\mathcal{H}]$ en términos geométricos

- Podemos pensar $\mathbb{E}[\cdot|\mathcal{H}]$ como una proyección ortoganal
- De hecho lo es en el subespacio espacio de Hilbert $V \leq L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que

$$X \in V \iff \mathbb{E}[X] = 0$$

$\mathbb{E}[\cdot|\mathcal{H}]$ en términos de información

- Una σ-álgebra $\mathcal{H} = \sigma(X)$ se puede pensar como la información que poseemos tras el experimento X

$\mathbb{E}[\cdot|\mathcal{H}]$ en términos de información

- Una σ-álgebra $\mathcal{H} = \sigma(X)$ se puede pensar como la información que poseemos tras el experimento X
- Así $\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$ "=" la mejor aproximación de X, si poseemos la información $\mathcal{H}$

$\mathbb{E}[\cdot|\mathcal{H}]$ en términos de información

- Una σ-álgebra $\mathcal{H} = \sigma(X)$ se puede pensar como la información que poseemos tras el experimento X

- Así $\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$ "=" la mejor aproximación de X, si poseemos la información $\mathcal{H}$

Así podemos leer las siguientes propiedes en términos de información

- $X \in \mathcal{H} \Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{H}] = X$
- $X \perp \mathcal{H} \Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{H}] = 0$
- $\mathcal{H} \leq \mathcal{G} \Rightarrow \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\,\mathcal{H}\right] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$

Filtraciones

$$\begin{array}{ccc} \text{Fenómeno} & \longrightarrow & \text{modelo} & (\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}) \\ \text{físico} & & \text{estocástico} & \uparrow \\ & & & \mathcal{F}_t \text{ información } @t \end{array}$$

Filtraciones

$$\begin{array}{ccccc} \text{Fenómeno} & \longrightarrow & \text{modelo} & & (\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}) \\ \text{físico} & & \text{estocástico} & & \uparrow \\ & & & & \mathcal{F}_t \text{ información } @t \end{array}$$

La información que vamos obteniendo del fenómeno queda descrita por la *filtración* en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$$\{\text{constantes}, \mathbb{P}\text{-nulos}\} =: \mathcal{F}_0 \leq \ldots \leq \mathcal{F}_\infty := \mathcal{F}$$

sucesión creciente de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$.

Filtraciones

$$\begin{array}{ccccc} \text{Fenómeno} & \longrightarrow & \text{modelo} & & (\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}) \\ \text{físico} & & \text{estocástico} & & \uparrow \\ & & & & \mathcal{F}_t \text{ información } @t \end{array}$$

La información que vamos obteniendo del fenómeno queda descrita por la ***filtración*** en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$$\{\text{constantes}, \mathbb{P}\text{-nulos}\} =: \mathcal{F}_0 \leq \ldots \leq \mathcal{F}_\infty := \mathcal{F}$$

sucesión creciente de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$.

Generalmente hacemos $\mathcal{F}_s = \sigma(X_0, \ldots, X_s)$.

Martingala

Definition

Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un e.p. y $\mathcal{F}_0 \leq ... \leq \mathcal{F}_\infty$ una filtración de $\mathcal{F}$. El proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ es una *martingala* si

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s, \qquad \forall t \geq s.$$

Procesos adapatados a una filtración

Definition

$(X_t)_{t\geq 0}$ es *adaptado* a una filtración $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si $X_t \in \mathcal{F}_t$.

Interpretación

- Un proceso es adapatado a $\mathbb{F}$ si lo que sabemos de él ahora(t) es $\mathcal{F}_t$
- No nos podemos anticipar al futuro

Descomposiciones Doob-Meyer

Motivación de la integral estocástica

Construir difución de Markov a partir de su generador infinitesimal
(*“encontrar la solución a una ecuación diferencial estocástica”*)

La integral de Riemann

$$\int_0^T f(t)\mathrm{d}t := \lim_{|\Pi_n|\to 0} \sum_i f(\tau_i)(t_i - t_{i-1})$$

$$\begin{aligned} \Pi_n \quad & \text{es} \quad \text{partición } 0 =: t_0 < \ldots < t_n := T \\ \tau_i \quad & \in \quad [t_{i-1}, t_i] \\ f \quad & \in \quad \mathcal{C}_{Riemann} \\ & \quad\quad := \text{clase de funciones Riemann-integrables} \end{aligned}$$

Sobre la clase $\mathcal{C}_{Riemann}$

Theorem

Criterio de Riemann

$$f \in \mathcal{C}_{Riemann} \iff \lim \sum_i M_i(t_i - t_{i-1}) = \lim \sum_i m_i(t_i - t_{i-1})$$

$M_i := \sup\{f(t) : t_{i-1} \leq t \leq t_i\}$ *y* $m_i := \inf\{f(t) : t_{i-1} \leq t \leq t_i\}$.

Algunas subclases de $\mathcal{C}_{Riemann}$

- funciones acotadas y monótonas
- funciones continuas
- funciones con contables discontinuidades

Algunas limitaciones de la integral de Riemann

1. Hay funciones fuera de $\mathcal{C}_{Riemann}$
2. La integral de Riemann no se intercambia bien con límites
3. Un único integrador, *i.e.*, $\mathrm{d}t$

Algunas limitaciones de la integral de Riemann

1. Hay funciones fuera de $\mathcal{C}_{Riemann}$
2. La integral de Riemann no se intercambia bien con límites
3. Un único integrador, *i.e.*, $\mathrm{d}t$

Ejemplos ($[0, T] = [0, 1]$)

- $1_{\mathbb{Q}} \notin \mathcal{C}_{Riemann}$

$$\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(t) := \begin{cases} 1, & \text{si } t \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } t \notin \mathbb{Q} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \sum M_i(t_i - t_{i-1}) = 1 \\ \sum m_i(t_i - t_{i-1}) = 0 \end{cases}$$

Algunas limitaciones de la integral de Riemann

1. Hay funciones fuera de $\mathcal{C}_{Riemann}$
2. La integral de Riemann no se intercambia bien con límites
3. Un único integrador, *i.e.*, $\mathrm{d}t$

Ejemplos ($[0, T] = [0, 1]$)

- $1_{\mathbb{Q}} \notin \mathcal{C}_{Riemann}$

$$\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(t) := \begin{cases} 1, & \text{si } t \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } t \notin \mathbb{Q} \end{cases} \implies \begin{cases} \sum M_i(t_i - t_{i-1}) = 1 \\ \sum m_i(t_i - t_{i-1}) = 0 \end{cases}$$

- Ennumeramos los racionales $\mathbb{Q} = (q_n)_{n \geq 1}$. Definimos $A_n := \{q_1, \ldots, q_n\}$ y $f_n := \mathbf{1}_{A_n}$

$$\mathcal{C}_{Riemann} \ni f_n \nearrow f \not\Rightarrow \int f_n \to \int f.$$

Una extensión: Integral Riemann-Stieltjes

$$\int_0^T f(t)\mathrm{d}g(t) : \; = \lim_{|\Pi_n|\to 0} \sum_i f(\tau_i)(g(t_i) - g(t_{i-1}))$$

$$\begin{aligned} \Pi_n & \quad \text{es} \quad \text{partición } 0 =: t_0 < \ldots < t_n := T \\ \tau_i & \quad \in \quad [t_{i-1}, t_i] \\ f & \quad \in \quad \mathcal{C}_{Riemann-Stieltjes} \\ g & \quad \in \quad \mathcal{I}_{Riemann-Stieltjes} \end{aligned}$$

$\mathcal{I}_{Riemann-Stieltjes}$ e Integración por partes

- Definimos la clase de integradores

$$\mathcal{I}_{Riemann-Stieltjes} := \left\{ [0, T] \xrightarrow{g} \mathbb{R} \ : \ \text{monotona creciente} \right\}$$

$\mathcal{I}_{Riemann-Stieltjes}$ e Integración por partes

- Definimos la clase de integradores

$$\mathcal{I}_{Riemann-Stieltjes} := \left\{ [0, T] \xrightarrow{g} \mathbb{R} \ : \ \text{monotona creciente} \right\}$$

- Para $(f, g) \in \mathcal{C}_{Riemann-Stieltjes} \times \mathcal{I}_{Riemann-Stieltjes}$,

$$f(T)g(T) - f(0)g(0) = \int_0^T f(t)\mathrm{d}g(t) - \int_0^T g(t)\mathrm{d}f(t)$$

$\mathcal{I}_{Riemann-Stieltjes}$ e Integración por partes

- Definimos la clase de integradores

$$\mathcal{I}_{Riemann-Stieltjes} := \left\{ [0, T] \xrightarrow{g} \mathbb{R} \ : \ \text{monotona creciente} \right\}$$

- Para $(f, g) \in \mathcal{C}_{Riemann-Stieltjes} \times \mathcal{I}_{Riemann-Stieltjes}$,

$$f(T)g(T) - f(0)g(0) = \int_0^T f(t)\mathrm{d}g(t) - \int_0^T g(t)\mathrm{d}f(t)$$

- Un ejemplo: $g = f$,

$$\frac{1}{2}\left(f(T)^2 - f(0)^2\right) = \int_0^T f(t)\mathrm{d}f(t)$$

Limitación de la clase $\mathcal{I}_{Riemann-Stieltjes}$

En nuestro ejemplo $g = f$

$$
\begin{aligned}
L_n &:= \sum_{t_i \in \Pi_n} m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{t_i \in \Pi_n} f(t_{i-1})(f(t_i) - f(t_{i-1})) \\
R_n &:= \sum_{t_i \in \Pi_n} M_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{t_i \in \Pi_n} f(t_i)(f(t_i) - f(t_{i-1}))
\end{aligned}
$$

Limitación de la clase $\mathcal{I}_{Riemann-Stieltjes}$

En nuestro ejemplo $g = f$

$$
\begin{aligned}
L_n &:= \sum_{t_i \in \Pi_n} m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{t_i \in \Pi_n} f(t_{i-1})(f(t_i) - f(t_{i-1})) \\
R_n &:= \sum_{t_i \in \Pi_n} M_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{t_i \in \Pi_n} f(t_i)(f(t_i) - f(t_{i-1}))
\end{aligned}
$$

con lo que

$$L_n - R_n = \sum_{t_i \in \Pi_n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2.$$

Limitación de la clase $\mathcal{I}_{Riemann-Stieltjes}$

En nuestro ejemplo $g = f$

$$\begin{aligned} L_n &:= \sum_{t_i \in \Pi_n} m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{t_i \in \Pi_n} f(t_{i-1})(f(t_i) - f(t_{i-1})) \\ R_n &:= \sum_{t_i \in \Pi_n} M_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{t_i \in \Pi_n} f(t_i)(f(t_i) - f(t_{i-1})) \end{aligned}$$

con lo que

$$L_n - R_n = \sum_{t_i \in \Pi_n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2.$$

Lo que esperamos: $\qquad L_n - R_n \longrightarrow 0.$

Definimos *Variación cuadrática* como

$$V_2(f,[0,T]) = \sup_{\Pi_n}\left\{\sum_{t_i\in\Pi_n}(f(t_i)-f(t_{i-1}))^2\right\}.$$

Definimos *Variación cuadrática* como

$$V_2(f,[0,T]) = \sup_{\Pi_n}\left\{\sum_{t_i\in\Pi_n}(f(t_i)-f(t_{i-1}))^2\right\}.$$

En estos términos, tenemos que

$$(L_n - R_n \longrightarrow 0) \Longrightarrow V_2(f,[0,T]) = 0.$$

Definimos *Variación cuadrática* como

$$V_2(f,[0,T]) = \sup_{\Pi_n}\left\{\sum_{t_i\in\Pi_n}(f(t_i)-f(t_{i-1}))^2\right\}.$$

En estos términos, tenemos que

$$(L_n - R_n \longrightarrow 0) \Longrightarrow V_2(f,[0,T]) = 0.$$

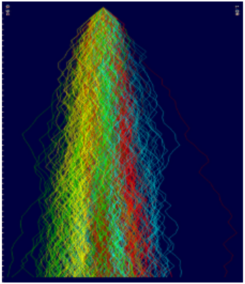
Por lo tanto,

$$V_2(0,[0,T]) \neq 0 \Rightarrow g \notin \mathcal{I}_{Riemann-Stieltjes}$$

Ejemplo de función con $V_2 = \infty$

Las trayectorias del movimiento Browniano satisfacen

$$V_2(B(\omega, t), [0, T]) = \infty, \qquad \text{casi seguramente}$$



Segunda extensión: Integral de Lebesgue

Paso 1: Definir la integral para funciones simples

$$s(t) := \sum_{t_i \in \Pi_n} a_i \mathbf{1}_{[t_{i-1}, t_i)} \Longrightarrow \int_0^T s(t)\mathrm{d}t = \sum_{t_i \in \Pi_n} a_i (t_i - t_{i-1})$$

Segunda extensión: Integral de Lebesgue

Paso 1: Definir la integral para funciones simples

$$s(t) := \sum_{t_i \in \Pi_n} a_i \mathbf{1}_{[t_{i-1}, t_i)} \Longrightarrow \int_0^T s(t) \mathrm{d}t = \sum_{t_i \in \Pi_n} a_i (t_i - t_{i-1})$$

Paso 2: Aproximación de integrandos más generales

$$s_n := \sum_{k=0}^{2^{2n}} \frac{k}{2^n} \mathbf{1}_{f^{-1}([\frac{k}{2^n}, \frac{k}{2^n}])} \nearrow f,$$

Segunda extensión: Integral de Lebesgue

Paso 1: Definir la integral para funciones simples

$$s(t) := \sum_{t_i \in \Pi_n} a_i \mathbf{1}_{[t_{i-1}, t_i)} \Longrightarrow \int_0^T s(t)\mathrm{d}t = \sum_{t_i \in \Pi_n} a_i (t_i - t_{i-1})$$

Paso 2: Aproximación de integrandos más generales

$$s_n := \sum_{k=0}^{2^{2n}} \frac{k}{2^n} \mathbf{1}_{f^{-1}([\frac{k}{2^n}, \frac{k}{2^n}])} \nearrow f,$$

De esta manera

$$\int_0^T f^{\pm}(t)\mathrm{d}t = \sup\left\{ \int_0^T s(t)\mathrm{d}t \ : \ s \text{ es función simple, } 0 \leq s \leq f^{\pm} \right\},$$

La integral de Lebesgue

$$\int_0^T f(t)\mathrm{d}t := \int_0^T f^+(t)\mathrm{d}t - \int_0^T f^-(t)\mathrm{d}t$$

La integral de Lebesgue

$$\int_0^T f(t)\mathrm{d}t := \int_0^T f^+(t)\mathrm{d}t - \int_0^T f^-(t)\mathrm{d}t$$

Propiedades

- $\{\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}\}, \mathcal{C}_{Riemann} \subset \mathcal{C}_{Lebesgue} =: \mathcal{L}^1$
- Se comporta bien bajo límites (Convergencia monótona y dominada)

Integral estocástica de Itô

Itô recupera las ideas de Riemann-Stieltjes y Lebesgue.

$$\int_0^T X_t \mathrm{d}W_t := \lim_{|\Pi_n|\to 0} \sum_{t_i \in \Pi_n} X_{t_{i-1}}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$$

Integral estocástica de Itô

Itô recupera las ideas de Riemann-Stieltjes y Lebesgue.

$$\int_0^T X_t \mathrm{d}W_t := \lim_{|\Pi_n|\to 0} \sum_{t_i \in \Pi_n} X_{t_{i-1}}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$$

$$\begin{aligned} \Pi_n \quad & \text{es} \quad \text{partición } 0 =: t_0 < \ldots < t_n := T \\ (X_t)_{t\in[0,T]} \quad & \in \quad \mathcal{C}_{It\hat{o}} \\ & \quad\quad := \text{clase de procesos Itô-integrables} \\ \lim \quad & \textit{es} \quad \text{límite en media cuadrática} \end{aligned}$$

Construcción Integral estocástica de Itô

Siguiendo los pasos de Lebesgue

1. Definir integral para procesos estocásticos simples $\mathcal{E}$

$$u(t,\omega) := \sum \xi_{i-1}(\omega)\mathbf{1}_{[t_{i-1},t_i)}(t), \qquad \xi_{i-1} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_{i-1}})$$

2. (Isometría de Itô) Definimos la integral mediante aproximación

$$\mathcal{H}^2 := \{(u_t)_{t\in[0,T]} \;:\; \exists(s^n) \subseteq \mathcal{E},\; s^n \to u\}$$

Observaciones

La integral estocástica I_t

- Define un operador lineal
- Es una proceso estocástico $(I_t)_{t\geq 0}$
- Es una martingala (en particular $\mathbb{E}[I_t]$ es constante)

Contraintuición determinista

Example

Pensaríamos que

$$\int_0^1 B_1 \mathrm{d}B_t = B_1 B_t$$

sin embargo,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^1 B_1 \mathrm{d}B_t\right] = \mathbb{E}\left[B_1 B_t\right] = \min\{1, t\} = t$$

que no es constante. Por lo tanto, $\int_0^1 B_1 \mathrm{d}B_t$ no sería martingala. Por lo tanto

$$\int_0^1 B_1 \mathrm{d}B_t \neq B_1 B_t$$

Procesos y Fórmula de Itô

Definition

Un proceso $(X_t)_{t\in[0,T]}$ de si es de la forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s \mathrm{d}B_s + \int_0^t v_s^X \mathrm{d}s$$

Procesos y Fórmula de Itô

Definition

Un proceso $(X_t)_{t\in[0,T]}$ de si es de la forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s \mathrm{d}B_s + \int_0^t v_s^X \mathrm{d}s$$

Si transformamos $(B_t)_{t\in[0,T]}$ mediante una función suave $f \in \mathcal{C}^{1,2}$ tenemos

$$f(t, X_t) - f(0, X_0) = \int_0^t f(s, B_s)\mathrm{d}B_s + \int_0^t \dot{f}(s, B_s) + \frac{1}{2} f''(s, B_s)\mathrm{d}B_s$$

Contraintuición determinista

Example

Si tomamos $f(t,x) = x$ tenemos

$$\frac{1}{2}\left(B_t^2 - B_0^2\right) \underbrace{-\frac{1}{2}t}_{!} = \int_0^t B_s \mathrm{d}B_s$$

Contraintuición determinista

Example

Si tomamos $f(t,x) = x$ tenemos

$$\frac{1}{2}\left(B_t^2 - B_0^2\right) \underbrace{-\frac{1}{2}t}_{!} = \int_0^t B_s \mathrm{d}B_s$$

Example

Si $(X_t)_{t\in[0,T]}$ y $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ son de Itô entonces

$$X_t Y_t - X_0 Y_0 = \int_0^t X_s \mathrm{d}Y_s + \int_0^t Y_s \mathrm{d}X_s + \underbrace{\int_0^t v_s^X v_s^Y \mathrm{d}s}$$

Contraintuición determinista

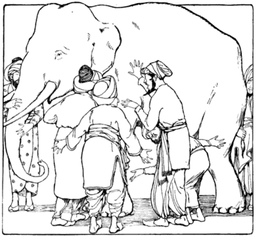
La integral depende del punto elegido en $[t_{i-1}, t_i]$: si $\tau_i = \lambda t_i + (1-\lambda)t_{i-1}$ entonces

$$\begin{aligned}\int_0^T B_t \mathrm{d}B_t : &= \lim_{|\Pi_n|\to 0} \sum_{t_i \in \Pi_n} B_{\tau_{i-1}}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \\ &= \frac{1}{2}\left(B_t^2 - B_0^2\right) \underbrace{+(\lambda - \frac{1}{2})t}_{!}\end{aligned}$$

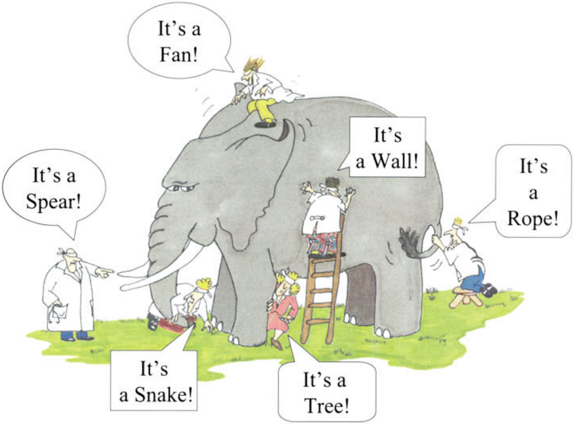
Últimos aspectos

- Hay alternativas a la integral de Itô
    - La integral de Fisk-Stratonovich
- Aplicaciones del cáluculo y la fórmula de Itô
    - Evaluación de integrales
    - Descomposición de Doob Meyer
    - T. de Caracterización de Lévy
    - Cambios de Probabilidad
    - T. de Girsanov
    - Fórmula de Tanaka
    - Fórmula de Black-Scholes-Merton (Nobel en economía 1997)

El elefante en la obscuridad



El poema de Rumi en la filosofía de la ciencia



Gracias por su atención

Referencias

- http://www.galileo.org/math/puzzles/JanusUpsideDown.html