QUÈ ÉS L'APLICACIÓ DE KIRWAN?

ANDRATX BELLMUNT

Resum. Aquestes notes corresponen a la xerrada oferta al *Seminari Informal de Matemàtiques de Barcelona* (`www.imub.ub.es/simba`) el dia 7 de febrer de 2012. El que es pretén és introduir totes aquelles nocions que permeten definir l'aplicació de Kirwan $H_G^*(M) \to H^*(M/\!\!/G)$, que relaciona la cohomologia equivariant d'una varietat simplèctica M respecte l'acció hamiltoniana d'un grup de Lie G amb la cohomologia del corresponent quocient simplèctic $M/\!\!/G$.

Índex

Introducció 2
1. D'on prové la definició? 2
2. Toy model: n punts sobre l'esfera 2
3. Grups de Lie 3
4. Cohomologia (de de Rham) 5
5. Cohomologia equivariant 6
6. Varietats simplèctiques 6
7. Accions hamiltonianes 7
8. L'aplicació de Kirwan 8
Referències 9

Introducció

L'aplicació de Kirwan

$$H_G^*(M) \to H^*(M/\!\!/G)$$

relaciona la **cohomologia equivariant** d'una **varietat simplèctica** M respecte l'**acció hamiltoniana** d'un **grup de Lie** G amb la **cohomologia** del corresponent **quocient simplèctic** $M/\!\!/G$. El nostre objectiu principal serà introduir tots els conceptes ressaltats en la frase anterior per tal de poder comprendre la definició de l'aplicació de Kirwan. Nogensmenys també dedicarem algunes seccions a veure d'on prové aquesta aplicació i a donar-ne algun exemple il·lustratiu. En més d'una ocasió introduirem els conceptes sense donar-los tot el context que fóra desitjable amb la intenció de traçar el camí més directe cap a la definició de l'aplicació de Kirwan. En aquestes notes hem afegit diverses referències bibliogràfiques que esperem que puguin suplir aquesta mancança.

1. D'on prové la definició?

La varietat simplèctica M cal pensar-la com l'espai de configuracions d'un sistema i l'acció del grup de Lie G com les simetries d'aquest sistema. En aquestes condicions podem definir el **moment** del sistema

$$\mu : M \to \mathfrak{g}^*,$$

on $\mathfrak{g}$ és l'**àlgebra de Lie** de G (acabem de topar amb dos conceptes més que caldrà definir!). El conjunt $\mu^{-1}(0)$ correspon a les configuracions en equilibri. Llavors el quocient $\mu^{-1}(0)/G =: M/\!\!/G$ correspon a les configuracions en equilibri llevat de simetries. Així doncs la idea amb la qual ens hem de quedar és que

L'aplicació de Kirwan relaciona un espai de configuracions amb simetries amb les seves configuracions en equilibri llevat de simetria.

2. Toy model: n punts sobre l'esfera

Prenem un nombre finit i ordenat de punts $p_1, \dots, p_n$ sobre l'esfera $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. En altres paraules pensem

$$(p_1, \dots, p_n) \in S^2 \times \overset{n}{\cdots} \times S^2 = M.$$

Aquest és el nostre espai de configuracions. Si ens situem al centre de l'esfera és raonable considerar que si tenim els punts fixats i l'esfera rota, el conjunt de punts en essència no ha canviat. També podem pensar el mateix si reflectim cadascun dels punts en el seu oposat. En definitiva, podem pensar que l'acció de $SU(2) = G$ en

M ens dóna les simetries del sistema. En aquest exemple concret es pot veure que el moment és simplement

$$\begin{array}{rccc} \mu: & S^2\times \overset{n}{\cdots} \times S^2 & \longrightarrow & \mathfrak{su}(2)^* \simeq \mathbb{R}^3 \\ & (p_1,\ldots,p_n) & \longmapsto & p_1+\cdots+p_n \end{array}$$

Així doncs $\mu^{-1}(0)$ representa aquelles configuracions que tenen el seu centre de masses a l'origen. Un exemple fàcil de pensar és el cas $n = 3$. En aquest cas els elements de $\mu^{-1}(0)$ són aquelles configuracions consistents en triangles equilàters inscrits a S^2. Com que qualsevol triangle equilàter pot ser enviat a qualsevol altre a través de l'acció de $SU(2)$, tindrem que $S^2 \times S^2 \times S^2 /\!\!/ SU(2)$ consisteix d'un únic punt. Això ens està dient que donats tres punts hi ha essencialment una única configuració en equilibri: la donada per un triangle equilàter.

3. Grups de Lie

Un **grup de Lie** és una varietat diferencial G amb estructura de grup de manera que l'operació de grup

$$\begin{array}{ccc} G\times G & \longrightarrow & G \\ (g,h) & \longmapsto & gh \end{array}$$

sigui diferenciable.

Alguns exemples de grups de Lie són:

- Tots els grups discrets.
- Els espais vectorials reals i complexos amb l'operació de suma.
- $GL(n,\mathbb{R})$, $SL(n,\mathbb{R})$, $O(n)$, $SO(n)$ (inclou $SO(2) \simeq S^1$, $SO(3) \simeq \mathbb{R}P^3$).
- $GL(n,\mathbb{C})$, $SL(n,\mathbb{C})$, $U(n)$, $SU(n)$ (inclou $U(1) \simeq S^1$, $SU(2) \simeq S^3$).
- Productes de grups de Lie (inclou $T^n = S^1\times \overset{n}{\cdots} \times S^1$).

Evidentment la principal virtut dels grups de Lie és que combinen dues estructures amb moltes propietats: la de grup i la de varietat diferencial. Fent ús d'aquest fet podem obtenir definicions i resultats interessants. En particular donat un grup de Lie G i e el seu element neutre volem veure que l'espai tangent $T_eG =: \mathfrak{g}$ té una estructura natural d'àlgebra de Lie:

Donat $g \in G$ considerem la *translació per l'esquerra* associada a g,

$$\begin{array}{rccc} l_g: & G & \longrightarrow & G \\ & h & \longmapsto & gh \end{array}.$$

Un camp vectorial X de G és *invariant per l'esquerra* quan $\forall g,h \in G$ es té que $X_{gh} = d_hl_g(X_h)$. Denotem per $\mathfrak{X}^L(G)$ els camps vectorials invariants per l'esquerra de G. Sigui $\xi \in \mathfrak{g}$ li associem un camp vectorial X^ξ de G definit per $X^\xi_g = d_el_g(\xi)$.

Resulta que l'aplicació

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{X}^L(G) \\ \xi & \longmapsto & X^\xi \end{array},$$

és un isomorfisme d'espais vectorials amb inversa donada per $X \mapsto X_e$ (en particular l'aplicació està ben definida, i.e. X^ξ és invariant per l'esquerra). És senzill comprovar que si $X, Y \in \mathfrak{X}^L(G)$ llavors $[X, Y] \in \mathfrak{X}^L(G)$. Gràcies a això i a l'isomorfisme anterior es té que

$$[\xi, \eta] := [X^\xi, X^\eta]_e$$

defineix una estructura d'**àlgebra de Lie** a $\mathfrak{g}$.

Ens caldran algunes nocions més que relacionen G amb la seva àlgebra de Lie $\mathfrak{g}$. La primera d'elles és *l'aplicació exponencial*

$$\begin{array}{rccc} \exp : & \mathfrak{g} & \longrightarrow & G \\ & \xi & \longmapsto & \varphi_1^\xi(e) \end{array},$$

definida a partir del flux φ_t^ξ del camp X^ξ. Tot i que nosaltres en farem un ús mínim aquesta aplicació és d'importància cabdal en la teoria de grups de Lie i serveix per demostrar alguns resultats importants, com per exemple que els únics grups de Lie compactes i connexos (com a varietat) i abelians (com a grup) són els tors (vegeu [BrTo, I.3] per a més detalls sobre l'aplicació exponencial).

L'acció de G en si mateix per conjugació

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & Hom(G) \\ g & \longmapsto & c_g : h \mapsto ghg^{-1} \end{array},$$

indueix l'*acció adjunta* de G en $\mathfrak{g}$

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & GL(\mathfrak{g}) \\ g & \longmapsto & Ad(g) := d_e c_g \end{array},$$

que alhora indueix l'*acció coadjunta* de G en $\mathfrak{g}^*$

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & GL(\mathfrak{g}^*) \\ g & \longmapsto & Ad^\#(g) := Ad(g^{-1})^* \end{array}.$$

En aquest últim cas prenem g^{-1} enlloc de g per tal que l'aplicació $G \to GL(\mathfrak{g}^*)$ sigui un morfisme de grups (i.e. $Ad^\#(gh) = Ad^\#(g) \circ Ad^\#(h)$) enlloc d'un antimorfisme de grups.

Nosaltres no requerirem més nocions de grups de Lie des les que hem donat fins aquí, però aquesta és un àrea de les matemàtiques amb múltiples aplicacions. Alguns textos de referència per introduir-se als grups de Lie són [BrTo], [Hel] o [War].

4. Cohomologia (de de Rham)

Sigui M una varietat diferencial considerem $\Omega^*(M)$ l'àlgebra graduada de formes diferencials en M, és a dir $\Omega^k(M) = \Lambda^k(T^*M)$. En particular $\Omega^0(M)$ s'identifica amb l'àlgebra de funcions diferenciables de M. Definim l'operador *diferencial exterior*

$$d : \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^{*+1}(M)$$

per les propietats següents:

(1) Si $f \in \Omega^0(M)$, llavors df és la diferencial de f.
(2) Si $f \in \Omega^0(M)$, llavors $d(df) = 0$.
(3) d és una antiderivació: $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\beta$.

Es pot comprovar que aquestes propietats determinen completament d. Un resultat essencial és que l'operador d satisfà $d^2 = 0$, de manera que $(\Omega^*(M), d)$ és un complex cohomològic (a diferència dels complexos homològics, en què el grau baixa, aquí el grau augmenta). Recordem com es calcula la cohomologia d'un complex cohomològic: tenim que

$$Z^k(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) : \ d\alpha = 0\}$$

són els *k-cocicles* (de de Rham) o *k-formes tancades* mentre que

$$B^k(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) : \ \exists \beta \in \Omega^{k-1}(M), \ d\beta = \alpha\}$$

són les *k-covores* (de de Rham) o *k-formes exactes.* Com que $d^2 = 0$ tenim que $B^k(M)$ és un subespai vectorial de $Z^k(M)$. El quocient

$$H^k(M) = \frac{Z^k(M)}{B^k(M)}$$

és el k-èssim espai vectorial de **cohomologia** (de de Rham) de M. La cohomologia té moltes propietats que recorden les de l'homologia singular que s'estudia a la llicenciatura. El llibre [BoTu] és la referència estàndard per a estudiar cohomologia de de Rham. Cal destacar que l'operació $\wedge$ indueix una estructura d'anell a $H^*(M)$.

Sigui X un camp en M tenim dos coneguts operadors en $\Omega^*(M)$ associats a X i que són de caire geomètric. Són la *derivada de Lie*

$$L_X : \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(M)$$

i la *contracció*

$$\iota_X : \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^{*-1}(M).$$

Les interrelacions entre aquests operadors geomètrics i l'operador diferencial d són múltiples i vénen donades per les *equacions de Weil*, que ens diuen com commuten entre si:

- $\iota_X \iota_Y + \iota_Y \iota_X = 0$
- $L_X \iota_Y - \iota_Y L_X = \iota_{[X,Y]}$
- $L_X L_Y - L_Y L_X = L_{[X,Y]}$
- $d\iota_X + \iota_X d = L_X$
- $dL_X - L_X d = 0$
- $d^2 = 0$

5. Cohomologia equivariant

Suposem que G és un grup de Lie compacte actuant en una varietat diferencial M. Si l'acció és lliure, llavors l'espai d'òrbites M/G amb la topologia quocient és també una varietat diferencial (vegeu per exemple [Can, Teo. 23.4] o [KoNo, I.4.3]). D'aquesta manera podem definir correctament $H^*(M/G)$. Ara bé, què podem fer si l'acció no és lliure? La cohomologia equivariant el que busca és proporcionar un substitut adequat per M/G quan l'acció no és lliure. Suposem que E és una varietat contràctil on G actua lliurement. Llavors tenim dues propietats essencials:

- G actua lliurement a $M \times E$
- $M \times E$ és homotòpicament equivalent a M i, per tant, $H^*(M) \simeq H^*(M \times E)$

Així doncs definim la **cohomologia equivariant** de M respecte l'acció de G com

$$H^*_G(M) := H^*((M \times E)/G).$$

Cal resoldre dues qüestions: primera si existeix un espai E com el que volem i segona que la definició que hem fet no depèn de la tria de E. La resposta en ambdós casos és afirmativa i se'n poden trobar els detalls a les primeres pàgines de [Lib]. En particular podem prendre com a E l'espai total del fibrat universal de G, $G \to EG \to BG$.

Vegem alguns exemples de cohomologia equivariant:

- $H^*_G(\{pt\}) = H^*((\{pt\} \times EG)/G) \simeq H^*(EG/G) \simeq H^*(BG)$.
- Un cas particular de l'anterior és $H^*_{S^1}(\{pt\}) \simeq H^*(BS^1) \simeq H^*(\mathbb{C}P^\infty) \simeq \mathbb{R}[x]$ (amb $\deg x = 2$).
- L'acció de S^1 en S^2 per rotacions respecte l'eix vertical no és lliure. Es pot comprovar que $H^*_{S_1}(S^2) \simeq \mathbb{R}[x, y]/xy$ (amb $\deg x, y = 2$).

Una propietat que destaca és que, fins i tot en casos senzills com accions en un punt, la cohomologia equivariant pot tenir valors no nuls en graus arbitràriament grans, a diferència del que passa amb la cohomologia usual.

La cohomologia equivariant també pot ser expressada com la cohomologia d'un complex cohomològic anàleg al complex de de Rham. Una excel·lent referència per a aquest tractament i com relacionar-lo amb el que nosaltres hem explicat és [GuSt]. També [Lib] és un bon text per aprendre cohomologia equivariant.

6. Varietats simplèctiques

Una **varietat simplèctica** és un parell (M, ω) format per una varietat diferencial M i una 2-forma $\omega \in \Omega^2(M)$ tancada ($d\omega = 0$) i no degenerada (a una tal forma l'anomenem *forma simplèctica*). Alguns exemples són:

- $\mathbb{R}^{2n}$ amb la forma estàndard $\omega_0 = \sum dx_i \wedge dy_i$ (on les coordenades són $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$).
- $\mathbb{C}^n$ amb la forma estàndard $\omega_0 = \frac{i}{2} \sum dz_i \wedge d\overline{z}_i$ (on les coordenades són $(z_1, \ldots, z_n)$).
- Qualsevol superfície compacta i orientada amb una forma de volum.
- $\mathbb{C}P^n$ amb la forma de Fubini-Study (vegeu [Can, Homework 12]).
- Les grassmanianes complexes (després veurem quina forma simplèctica els podem donar).
- Les òrbites de l'acció coadjunta d'un grup de Lie amb la forma de Kirillov-Kostant (vegeu [Can, Homework 17]).
- Productes de varietats simplèctiques amb la forma producte.

Un difeomorfisme $F : M \to M$ és un *simplectomorfisme* si preserva la forma simplèctica, $F^*\omega = \omega$.

Un camp $X \in \mathfrak{X}(M)$ és *simplèctic* si preserva la forma simplèctica, $L_X\omega = 0$. En aquest cas de les equacions de Weil i de $d\omega = 0$ obtenim

$$0 = L_X\omega = d\iota_X\omega + \iota_X d\omega = d\iota_X\omega.$$

És a dir, X és simplèctic si $\iota_X\omega$ és una 1-forma tancada. Si, a més, la forma és exacta, i.e. si existeix una funció diferenciable h_X tal que $dh_X = \iota_X\omega$, llavors diem que X és *hamiltonià*. Fixem-nos que si M és simplement connexa, llavors $H^1(M) = 0$ i tots els camps simplèctics són hamiltonians.

7. Accions hamiltonianes

Suposem que un grup de Lie compacte G actua per simplectomorfimes en una varietat simplèctica M. A cada $\xi \in \mathfrak{g}$ li podem associar un camp tangent a M de la següent manera,

$$X_x^\xi = \frac{d}{dt}_{|t=0} \exp(t\xi)x.$$

Aquest camp és simplèctic perquè l'acció és per simplectomorfismes. Si $\forall \xi \in \mathfrak{g}$ tenim que X^ξ és hamiltonià direm que l'acció és *quasi-hamiltoniana.* En aquest cas, per cada $\xi \in \mathfrak{g}$ existeix una funció h_ξ tal que $dh_\xi = \iota_{X^\xi}\omega$. Això ens permet definir el **moment** de l'acció:

$$\begin{array}{rccc} \mu : & M & \longrightarrow & \mathfrak{g}^* \\ & x & \longmapsto & \mu(x) : \xi \mapsto h_\xi(x) \end{array}.$$

Finalment direm que l'**acció** és **hamiltoniana** si μ és G-equivariant, és a dir si $\mu(gx) = Ad^\#(g)\mu(x)$ per tot $g \in G$. Diem llavors que (M, ω, G, μ) és un *espai hamiltonià.*

Donat un espai hamiltonià, $\mu^{-1}(0)$ és G-invariant ja que si $\mu(x) = 0$ llavors $\mu(gx) = Ad^\#(g)\mu(x) = Ad^\#(g)0 = 0$. Així podem definir el **quocient simplèctic**

$$M/\!\!/G := \mu^{-1}(0)/G.$$

Considerem el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mu^{-1}(0) & \xhookrightarrow{i} & M \\ {\scriptstyle\pi}\Big\downarrow & & \\ M/\!\!/G & & \end{array}$$

donat per la inclusió i i la projecció al quocient π.

Teorema (Marsden-Weinstein-Meyer)**.** *Si G actua lliurement a $\mu^{-1}(0)$ llavors*

(1) *$\mu^{-1}(0)$ i $M/\!\!/G$ són varietats diferencials.*
(2) *π és diferenciable.*
(3) *Hi ha una única forma simplèctica ω_{red} en $M/\!\!/G$ tal que $i^*\omega = \pi^*\omega_{red}$.*

El teorema anterior és rellevant perquè ens dóna una nova manera de construir varietats simplèctiques a partir de les que ja coneixíem. La seva demostració es pot trobar a [Can, 23] o a [McSa, 5.4]. Alguns exemples de varietats simplèctiques que es poden construir seguint aquest mètode són els següents:

- Considerem l'acció de $U(k)$ en les matrius $M_{k\times n}(\mathbb{C})$. El corresponent quocient simplèctic és la grassmaniana complexa $Gr_{\mathbb{C}}(k,n)$.
- Un cas molt més elaborat és el de l'espai de connexions $\mathcal{A}$ d'un G-fibrat principal $G \to P \to B$ sobre una varietat de Riemann 2-dimensional B. En un cert sentit es pot pensar $\mathcal{A}$ com una varietat simplèctica de dimensió infinita i l'acció del grup gauge $\mathcal{G}$ és hamiltoniana. El corresponent moment envia una connexió A a la seva curvatura, de manera que $\mu^{-1}(0)$ està format per les connexions planes. El quocient simplèctic $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{G}$ és una varietat simplèctica de dimensió finita anomenada *espai de moduli de connexions planes* (vegeu [Can, 25] per més detalls sobre aquesta construcció i [KoNo] per a les nocions referents a fibrats principals).

Les dues últimes seccions han estat dedicades a les varietats simplèctiques. Per ampliar coneixements en aquest camp dues referències típiques són [Can] i [McSa].

8. L'aplicació de Kirwan

Sigui (M,ω,G,μ) un espai hamiltonià, amb acció lliure de G en $\mu^{-1}(0)$, la inclusió $i : \mu^{-1}(0) \hookrightarrow M$ indueix una aplicació $H^*_G(M) \to H^*_G(\mu^{-1}(0))$ en cohomologia equivariant. Ara bé, tenim un isomorfisme $H^*_G(\mu^{-1}(0)) \simeq H^*(M/\!\!/G)$. Composant l'aplicació anterior amb aquest isomorfisme obtenim l'**aplicació de Kirwan**

$$\kappa : H^*_G(M) \longrightarrow H^*(M/\!\!/G).$$

Teorema (Kirwan)**.** *κ és exhaustiva.*

La demostració original d'aquest resultat es pot trobar a [Kir]. La demostració que s'hi dóna no és constructiva, és a dir, donat un element $H^*(M/\!\!/G)$ no se n'explicita una preimatge per κ. A [Mun] es demostra que donada una classe $\delta \in H^*_{G\times G}(M \times M)$ que vagi a parar a la classe diagonal de $H^*(M/\!\!/G \times M/\!\!/G)$ sota l'aplicació de Kirwan per a l'acció de $G \times G$ en $M \times M$ es pot construir una inversa per la dreta de κ. En aquest mateix article la classe δ es construeix geomètricament en el cas en què G és abelià, però queden obertes algunes preguntes que intentaré respondre a la meva tesi:

- En el cas G abelià, com és l'espai de totes les classes δ que satisfan les condicions anteriors i que, per tant, donen lloc a inverses per la dreta de κ?
- Es pot explicitar la classe δ en el cas G no abelià? En particular, la podem construir geomètricament?

Referències

[BoTu] R. Bott i L.W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics **82**, Springer, Nova York, 1982.

[BrTo] T. Bröcker i T. tom Dieck, *Representations of Compact Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics **98**, Springer, Nova York, 1985.

[Can] A. Cannas da Silva, *Lectures on Symplectic Geometry*, Lecture Notes in Mathematics **1764** (2a edició corregida), Springer, Berlin Heidelberg, 2008.

[GuSt] V.W. Guillemin, S. Sternberg, *Supersymmetry and Equivariant de Rham Theory*, Mathematics Past and Present **2**, Springer, Berlin Heidelberg, 1999.

[Hel] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Graduate Studies in Mathematics **34**, American Mathematical Society, 2001.

[Kir] F.C. Kirwan, *Cohomology of Quotients in Symplectic and Algebraic Geometry*, Mathematical notes **31**, Princeton University Press, Princeton, 1984.

[KoNo] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry, volume I*, Interscience Publishers, Nova York, 1963.

[Lib] M. Libine, *Lecture notes on Equivariant Cohomology*, arXiv:0709.3615v3, 2010.

[McSa] D. McDuff, D. Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Nova York, 1998.

[Mun] I. Mundet i Riera, *The biinvariant diagonal class for Hamiltonian torus actions*, Advances in Mathematics 214, 469-493, 2007.

[War] F.W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics **94**, Springer, Nova York, 1983.