Una introducción a la Lógica Borrosa Matemática

Marco Cerami

Instituto de Investigación en Inteligencia Artificial (IIIA - CSIC)
Bellaterra (Spain)
cerami@iiia.csic.es

SIMBa, 14 Febrero 2011

La paradoja sorites

La paradoja sorites (del “montón") se atribuye al filósofo Eubúlides de Mileto, del 4^{o} siglo a.C.

- 10.000 granos de arena forman un montón
- Si a un montón de arena se le quita un grano, el resultado sigue siendo un montón

---

- 1 grano de arena forma un montón

Lenguaje

A partir de un conjunto infinito contable de variables proposicionales

$$Var = \{p_1, p_2, \ldots\}$$

y de un conjunto finito de conectivas lógicas

$$\mathcal{L} = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \top, \bot\}$$

se construye el conjunto de las formulas $Fm_{\mathcal{L}}$ por medio de las siguientes reglas sintácticas:

- toda variable es una formula,
- las constantes $\top$ y $\bot$ son formulas,
- si φ y ψ son formulas, entonces

$$\varphi \wedge \psi, \quad \varphi \vee \psi, \quad \varphi \wedge \psi, \quad \varphi \rightarrow \psi, \quad \neg\varphi$$

también son formulas

Deducción

Una deducción de una formula φ desde un conjunto de formulas Γ se define como una secuencia finita de formulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ tal que, toda formula perteneciente a esta secuencia

- o bien pertenece a Γ,
- o bien se obtiene de formulas que le preceden en la secuencia a través de la aplicación de reglas de inferencia.

Y, además

$$\varphi = \varphi_n$$

Como ejemplo deducimos la formula

$p \rightarrow p$

desde el conjunto de premisas

$\Gamma = \{ \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi), \quad (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \}$

a través de la aplicación de la regla del Modus Ponens:

$$\begin{array}{ll} \vdash & \varphi \\ \vdash & \varphi \rightarrow \psi \\ \hline \vdash & \psi \end{array}$$

1) $\vdash p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p)$	Prem.
2) $\vdash (p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p))$	Prem.
3) $\vdash (p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p)$	MP:1,2
4) $\vdash p \rightarrow (p \rightarrow p)$	Prem.
5) $\vdash p \rightarrow p$	MP:3,4

Semántica clásica: G. Boole (1848)

Una evaluación proposicional es un homomorfismo

$$v : Fm_{\mathcal{L}} \to \{0, 1\}$$

tal que

- $v(\top) = 1$,
- $v(\bot) = 0$,
- $v(\varphi \wedge \psi) = \min\{v(\varphi), v(\psi)\}$,
- $v(\varphi \vee \psi) = \max\{v(\varphi), v(\psi)\}$,
- $v(\varphi \to \psi) = \max\{1 - v(\varphi), v(\psi)\}$,
- $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$

- Una tautología es una formula que, para cualquier evaluación, tiene valor 1,
- una contradicción es una formula que, para cualquier evaluación, tiene valor 0,
- una formula satisfactible es una formula para la cual existe al menos una evaluación que le da valor 1,

Por ejemplo la formula $p \to p$ es una tautología, ya que

- con $v_1(p) = 1$ tenemos que $v_1(p \to p) = \max\{1 - 1, 1\} = 1$
- con $v_2(p) = 0$ tenemos que $v_2(p \to p) = \max\{1 - 0, 0\} = 1$

Formalización de la paradoja

Se defina, para $0 \leq n \leq 10.000$, la proposición:

p_n= "n granos de arena forman un montón"

$$
\begin{array}{ll}
\vdash & p_{10.000} \\
\vdash & p_{10.000} \to p_{9.999} \\
\vdash & p_{9.999} \\
\vdash & p_{9.999} \to p_{9.998} \\
\vdash & p_{9.998} \\
 & \vdots \\
\vdash & p_2 \\
\vdash & p_2 \to p_1 \\
\hline
\vdash & p_1
\end{array}
$$

Romper el esquema bivalente: J. Łukasiewicz (1920)

En 1920, en el intento de formalizar el problema de los futuros contingentes, define la primera semántica con más de dos valores para las funciones de implicación y negación.

$\to$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

	$\neg$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0

A partir de estas, las funciones para la conjunción y la disjunción, son definibles.

Infinitos valores: J. Łukasiewicz y A. Tarski (1930)

La Lógica de Łukasiewicz infinito-valorada se define sintacticamente como el conjunto de formulas deducibles a partir del conjunto de axiomas:

Ł1 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
Ł2 $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$
Ł3 $((\varphi \to \psi) \to \psi) \to ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$
Ł4 $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$
Ł5 $((\varphi \to \psi) \to (\psi \to \varphi)) \to (\psi \to \varphi)$

utilizando la regla del Modus Ponens como única regla de inferencia.

Semántica

Se considera una álgebra de valores, cuyo universo es el intervalo real $[0, 1]$ y cuyas operaciones primitivas están definidas de la forma siguiente:

$$a \to b := \min\{1, 1 - a + b\}$$

$$a \otimes b := \max\{0, a + b - 1\}$$

$$a \oplus b := \min\{1, a + b\}$$

$$\neg a := 1 - a$$

Completud

Rose y Rosser en 1958 y Chang en 1959 demuestran que el sistema axiomático definido por Łukasiewicz y Tarski tiene completud débil respeto a la semántica definida por los mismos autores en el universo $[0, 1]$.

En 1963 Hay demuestra que que el sistema axiomático definido por Łukasiewicz y Tarski tiene completud fuerte finitaria respeto a la misma semántica.

Theorem

Sea $\Gamma \cup \{\varphi\}$ un conjunto finito de formulas proposicionales. Entonces φ se deduce de Γ si y solo si para toda evaluación v tal que $v(\psi) = 1$, para toda formula $\psi \in \Gamma$ tenemos que $v(\varphi) = 1$. En símbolos:

$$\Gamma \vdash_{Ł} \varphi \iff \Gamma \models_{[0,1]_{Ł}} \varphi$$

Otras semánticas multi-valuadas: K. Gödel (1932)

Para cada $n \in \mathbb{N}$, se considera una álgebra de valores, cuyo universo es $\{0, \ldots, n\}$ y cuyas operaciones primitivas están definidas de la forma siguiente:

$$a \wedge b := \min\{a, b\}$$

$$a \vee b := \max\{a, b\}$$

$$a \to b := \begin{cases} \mathrm{n}, & \text{si } a \leq b \\ b, & \text{si } a > b \end{cases}$$

$$\neg a := \begin{cases} 0, & \text{si } a \neq 0 \\ \mathrm{n}, & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

Syntaxis y completud

En 1959, M. Dummett:

- generaliza la familia de álgebras finitas definida por Gödel a una álgebra infinita, linealmente ordenada y numerable,
- define un sistema axiomatico,
- demuestra la completud de su sistema axiomático respecto a su generalización de la familia de semánticas definidas por Gödel.

Expandir el lenguaje con constantes: J. Pavelka (1979)

Se considera la estructura:

$$[0,1]_{P Ł} = \langle [0,1], *_{Ł}, \wedge, \vee, \{\bar{r} \mid r \in [0,1]\}\rangle$$

donde

$$[0,1]_{P Ł} = \langle [0,1], *_{Ł}, \wedge, \vee, \{\bar{r} \mid r \in \{0,1\}\}\rangle$$

es la álgebra standard de Łukasiewicz y

$$\{\bar{r} \mid r \in [0,1]\}$$

es un conjunto de constantes o operadores 0-arios que añadimos al lenguaje algebraico original.

Esto permite de hablar de valores de verdad en el mismo lenguage a través de formulas como:

$$\bar{r} \to \varphi$$

$$\varphi \to \bar{r}$$

$$(\bar{r} \to \varphi) \otimes (\varphi \to \bar{r})$$

que, al tener valor 1, significan que la formula φ tiene al menos (al maximo, exactamente, resp.) valor r.

La Lógica del Producto: P. Hájek, F. Esteva y L. Godo (1996)

- Se define un sistema axiomático,
- se demuestra la completud de la lógica definida axiomaticamente respeto a la álgebra

$$[0,1]_\Pi = \langle [0,1], \cdot, \to_\cdot, 0 \rangle$$

donde la operación $\cdot$ es el producto entre números reales y $\to_\cdot$ es su residuo.

Las normas triangulares

Una operación $* : [0,1]^2 \to [0,1]$ es una norma triangular (o *t*-norma) si:

- es asociativa,
- es commutativa,
- es monótona creciente en cada argumento,
- tiene el 1 como elemento neutro.

Si, además, la operación $*$ es continua en ambos argumento, se le llama *t*-norma continua.

t-normas básicas

La conjunción de Łukasiewicz, la de Gödel y la del producto, cuando tienen el intervalo real $[0, 1]$ como universo, son *t*-normas continuas.

$$\begin{aligned} a *_{Ł} b &:= \max\{0, a + b - 1\} \\ a *_{G} b &:= \min\{a, b\} \\ a *_{\Pi} b &:= a \cdot b \end{aligned}$$

Sumas ordinales

Sea I un conjunto acotado y, para todo $i \in I$, sea $\mathbf{A}_i = \langle A_i, *_i, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ una cadena.
Suponemos que, para todo $i, j \in I$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Se define la suma ordinal de estas cadenas como la cadena:

$$\bigoplus_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} \mathbf{A_i} = \langle \bigoplus_{i\in I} A_i, *, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$$

donde el universo es:

$$\bigoplus_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}\{A_i \setminus \{1\}\} \ \cup \ \{\top\}$$

con orden lineal definido por la condición:

$$a \leq b \iff \begin{cases} a, b \in A_i \quad \text{y} \quad a \leq_i b \\ \qquad\qquad \bigvee \\ a \in A_i, \quad b \in A_j \quad \text{y} \quad i < j \end{cases}$$

y, para todos $a, b \in \bigoplus_{i \in I} A_i$,

$$a * b = \begin{cases} a *_i b, & \text{si } a, b \in A_i \\ a \wedge b, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El teorema de Mostert-Shields (1957)

Theorem

Toda t-norma continua es suma ordinal de t-normas de Gödel, Łukasiewicz o producto.

Los conjuntos borrosos: L. A. Zadeh (1965)

Se generaliza la idea de función característica de un conjunto crisp $C : U \to \{0, 1\}$

$$x \in C \iff C(x) = 1$$

Y se considera una función $C : U \to [0, 1]$ y cuyas operaciones conjuntistas están definidas de la forma siguiente:

$$(A \cap B)(x) := \min\{A(x), B(x)\}$$

$$(A \cup B)(x) := \max\{A(x), B(x)\}$$

$$\overline{A}(x) := 1 - A(x)$$

$$A \subseteq B \iff \inf_{x \in U}\{\max\{1 - A(x), B(x)\}\} = 1$$

Las t-normas como intersecciones: Alsina Trillas y Valverde (1983)

Dada una t-norma $*$ su residuo es una operación binaria $\rightarrow$ que cumple la ley de residuación respecto a $*$, o sea, que, para todo $a, b, c \in [0, 1]$:

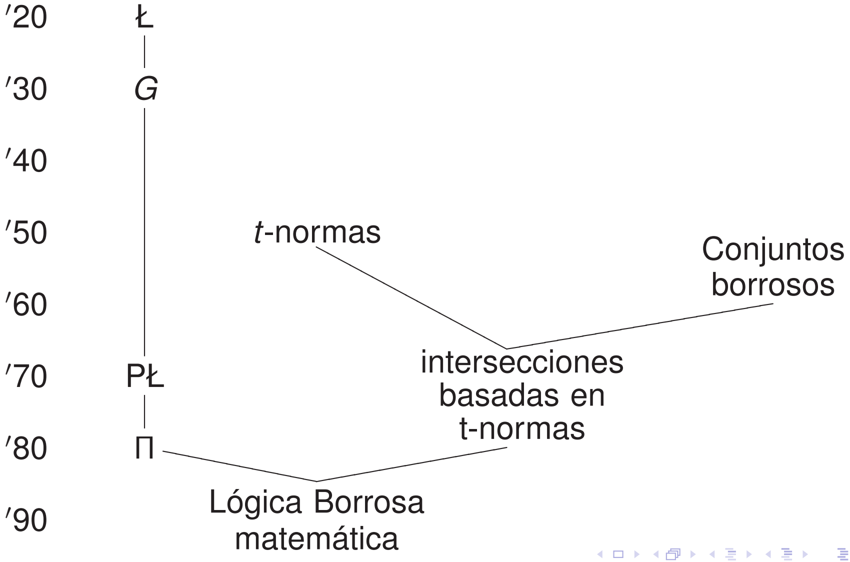
$$a * b \leq c \iff b \leq a \rightarrow c$$

Diremos que una t-norma es residuada si tiene un residuo. En particular, la operación definida por:

$$x \rightarrow_* y := \max\{z \in [0, 1] \mid z * x \leq y\}$$

si existe, es un residuo.

Un nuevo marco teórico: P. Hájek (1998)



La Lógica Borrosa Básica BL: P. Hájek (1998)

Es el fragmento común de las tres lógicas borrosas básicas.

La Lógica de Łukasiewicz extiende BL a través del axioma

$$\neg\neg\varphi \to \varphi$$

La Lógica de Gödel extiende BL a través del axioma

$$\varphi \to (\varphi \otimes \varphi)$$

La Lógica del Producto extiende BL a través de los axiomas

$$(\varphi \otimes \neg\varphi) \to \perp$$

$$\neg\neg\chi \to (((\varphi \otimes \chi) \to (\psi \otimes \chi)) \to (\varphi \to \psi))$$

La Monoidal *t*-norm Logic MTL: Esteva y Godo (2001)

Según la condición de residuación

$$x \to_* y := \max\{z \in [0,1] \mid z * x \leq y\}$$

la condición necesaria y suficiente para que un una *t*-norma sea residuada es la continuidad a la izquierda

BL extiende MTL a través del axioma

$$(\varphi \wedge \psi) \to (\varphi \otimes (\varphi \to \psi))$$

Bibliografia

- P. Hájek. *Metamathematics of Fuzzy Logic*. Kluwer Academic Publisher, 1998.
- C. Noguera. *Un apropament matemàtic al problema de la vaguetat*. Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques, vol. 23 (2), pp. 233–273, 2008.
- P. Cintula, P. Hájek, C. Noguera. *Handbook of Mathematical Fuzzy Logic*, 2 volumes. College Publications, 2011.