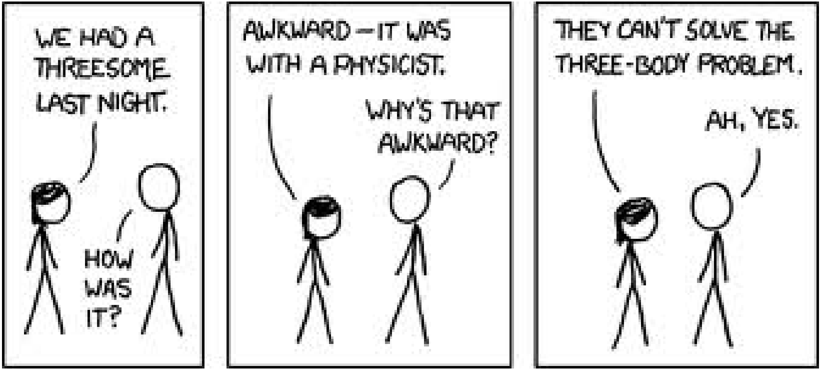
El problema (restringit) de tres cossos: quan tres són multitud

Daniel Pérez Palau

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

27 de març de 2012



cançó Three Body Problem (Klein Four):

[vídeo]
[lletra]

Si li preguntem a un algebrista dirà:

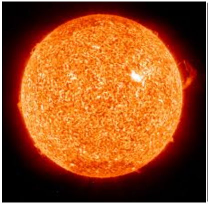
$$\mathbb{R}$$

$$\mathbb{C}$$

$$\mathbb{Z}_2$$

Intentem modelitzar el moviment de cossos a l'espai, per exemple:

- estrelles
- planetes
- asteroides
- satèl·lits




El cas més senzill: el problema de dos cossos

Johannes Kepler a començaments del segle XVII.

Primera llei de Kepler (1609)

Els planetes tenen moviments el·líptics al voltant del Sol, essent el Sol situat en un dels focus de l'el·lipse que descriu.

En general podem adaptar la primera llei a altres cossos a l'espai:

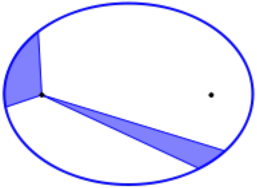
Primera llei de Kepler

Un cos descriu una secció cònica al voltant del Sol, essent el Sol situat en un dels focus de la secció que descriu.

Segona llei de Kepler (1609)

L'àrea escombrada per un radi entre el planeta i el Sol és igual a temps iguals

$$\frac{ds}{dt} = ctt.$$



Tercera llei de Kepler (1618)

El quadrat dels períodes de l'òrbita dels planetes és proporcional al cub del semieix major.

$$\frac{T^2}{a^3} = k,$$

on T és el període i a el semieix.

	Mercuri	Venus	Terra	Mart	Júpiter	Saturn	Urà	Neptú
a(UA)	0,38	0,72	1	1,52	5,20	9,53	19,19	30,06
T(anys)	0,24	0,61	1	1,88	11,86	29,44	84,01	164,79
T^2/a^3	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	1,000	0,999	0.999

La tercera llei no és certa, però podem adaptar-la per tal que ho sigui.

Tercera llei de Kepler II

La raó entre el quadrat del període de l'òrbita del planeta i el cub del semieix major és igual a $\frac{4\pi}{G(M+m)}$ on M és la massa del Sol i m la massa del planeta.

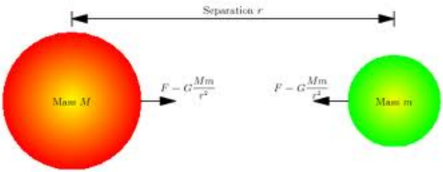
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}.$$

1. **Llei de la inèrcia** Tot cos roman en el seu estat de repòs o de moviment uniforme i rectilini sempre que no experimenti forces externes que en provoquin el seu canvi d'estat.
2. **Llei de la interacció i la força** El canvi en el moviment que experimenta un cos és proporcional a la força motriu externa i en la direcció en la que la força es realitza:
$$\vec{F} = m\vec{a}.$$
3. **Llei de l'acció i reacció** Tota acció és corresposta per una reacció d'igual magnitud i sentit contrari. Les accions mútues de dos cossos sempre són iguals i dirigides en sentits oposats.

La llei de la gravitació universal descriu la força experimentada per un cos sota l'atracció d'un altre com:

$$\vec{F} = -\frac{G m_1 m_2 \vec{r}}{|\vec{r}|^3},$$

on G és la constant de gravitació universal, m_1 i m_2 són les masses dels dos cossos i $\vec{r}$ la distància entre els dos cossos.



$$\ddot{\vec{X}}_i = -\frac{1}{m_i}\frac{Gm_1 m_2 \vec{r}}{|\vec{r}|^3}.$$

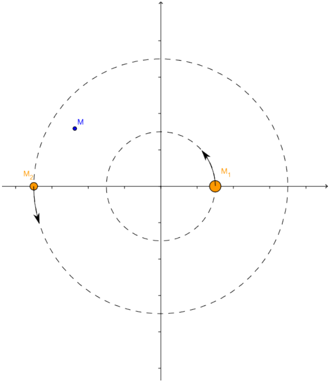
Aquest model permet generalitzar-lo a més cossos, si suposem que tenim n cossos:

$$\ddot{\vec{X}}_i = -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{Gm_j \vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|^3}.$$

Per tant podem trobar una modelització per a estudiar el Sistema Solar.

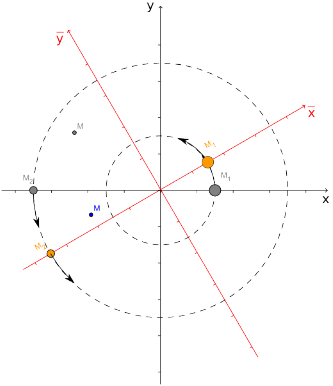
Reducció del problema: el problema dels tres cossos

Volem estudiar el moviment d'un cos amb massa negligible respecte de dos cossos amb massa que anomenem primaris.
Per estudiar-ho suposem que els dos cossos primaris es mouen mitjançant òrbites circulars i planes.



Per tant estem estudiant el Problema Restringit Circular de Tres Cossos.

Volem estudiar el moviment d'un cos amb massa negligible respecte de dos cossos amb massa que anomenem primaris.
Per estudiar-ho suposem que els dos cossos primaris es mouen mitjançant òrbites circulars i planes.



Per tant estem estudiant el Problema restringit circular de tres cossos.

Podem introduir unes noves coordenades que ens siguin més avantatjoses per a estudiar el problema de manera que passem de dependre de tres paràmetres a només un:

- Fixem l'origen de coordenades en el centre de masses dels dos primaris.
- Considerem un marc inercial (o rotatiu) de manera que els dos primaris resten fixos en la seva posició.
- Considerem les unitats de distància, temps i massa de manera que:
  - La distància entre els dos primaris és d'una unitat.
  - El temps de manera que la velocitat angular dels dos cossos sigui 1.
  - La suma de les masses dels dos cossos primaris és d'una unitat. Per tant en aquestes noves unitats tenim que:

$$m_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \mu \quad m_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 1 - \mu.$$

De manera que ara el nostre sistema només depèn del paràmetre μ.

El problema restringit ve donat per les equacions:

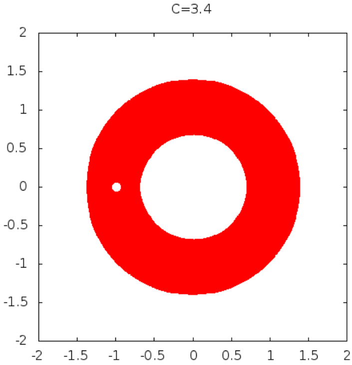
$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_y, \end{cases}$$

on $\Omega(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{1-\mu}{\sqrt{(x-\mu)^2+y^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(x+1-\mu)^2+y^2}} + \frac{\mu(1-\mu)}{2}$.

$$C(x, y, v_x, v_y) = -(v_x^2 + v_y^2) + 2\Omega(x, y) = -2E(x, y, v_x, v_y).$$

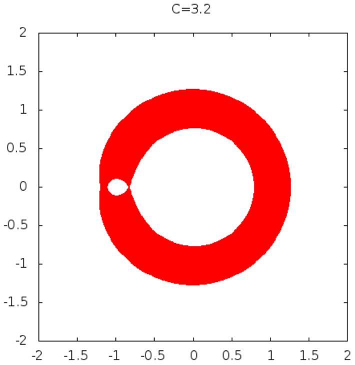
$$C(x, y, v_x, v_y) = -(v_x^2 + v_y^2) + 2\Omega(x, y) = -2E(x, y, v_x, v_y).$$

Això ens donarà la primera propietat important, fixat un valor per a la constant de Jacobi tenim una regió en la qual el moviment no és permès.



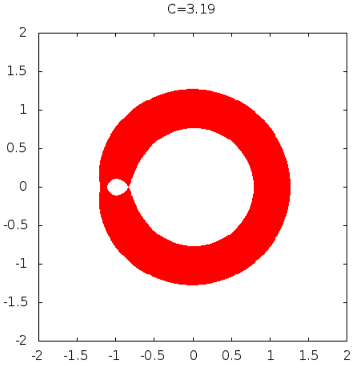
$$C(x, y, v_x, v_y) = -(v_x^2 + v_y^2) + 2\Omega(x, y) = -2E(x, y, v_x, v_y).$$

Això ens donarà la primera propietat important, fixat un valor per a la constant de Jacobi tenim una regió en la qual el moviment no és permès.



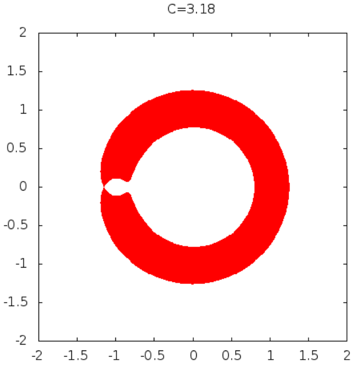
$$C(x, y, v_x, v_y) = -(v_x^2 + v_y^2) + 2\Omega(x, y) = -2E(x, y, v_x, v_y).$$

Això ens donarà la primera propietat important, fixat un valor per a la constant de Jacobi tenim una regió en la qual el moviment no és permès.



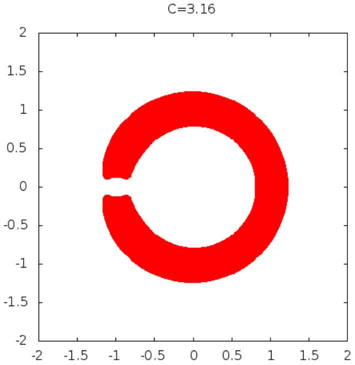
$$C(x,y,v_x,v_y) = -(v_x^2+v_y^2)+2\Omega(x,y) = -2E(x,y,v_x,v_y).$$

Això ens donarà la primera propietat important, fixat un valor per a la constant de Jacobi tenim una regió en la qual el moviment no és permès.



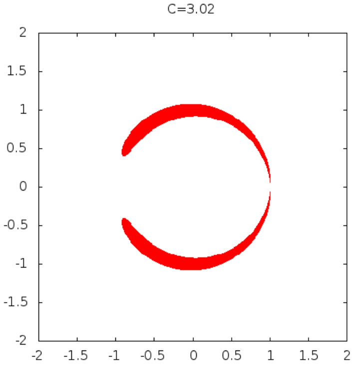
$$C(x,y,v_x,v_y) = -(v_x^2+v_y^2)+2\Omega(x,y) = -2E(x,y,v_x,v_y).$$

Això ens donarà la primera propietat important, fixat un valor per a la constant de Jacobi tenim una regió en la qual el moviment no és permès.



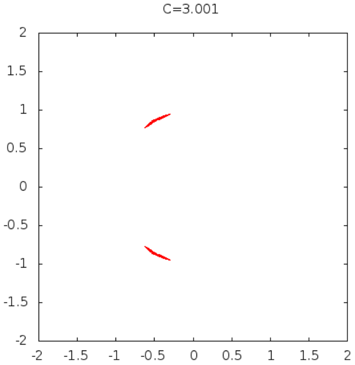
$$C(x,y,v_x,v_y) = -(v_x^2 + v_y^2) + 2\Omega(x,y) = -2E(x,y,v_x,v_y).$$

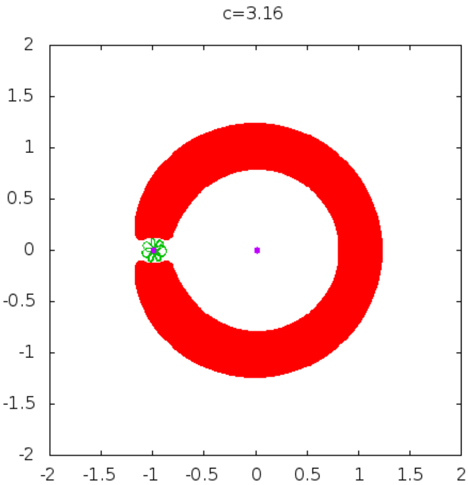
Això ens donarà la primera propietat important, fixat un valor per a la constant de Jacobi tenim una regió en la qual el moviment no és permès.

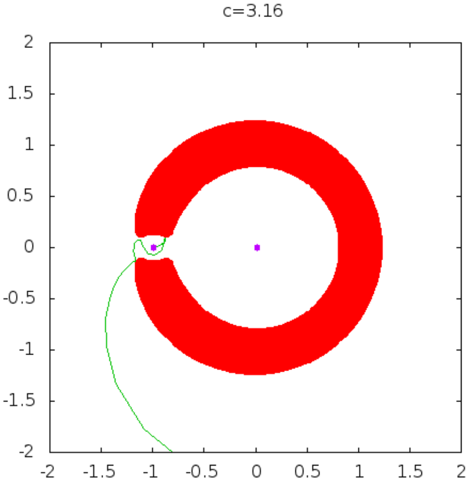


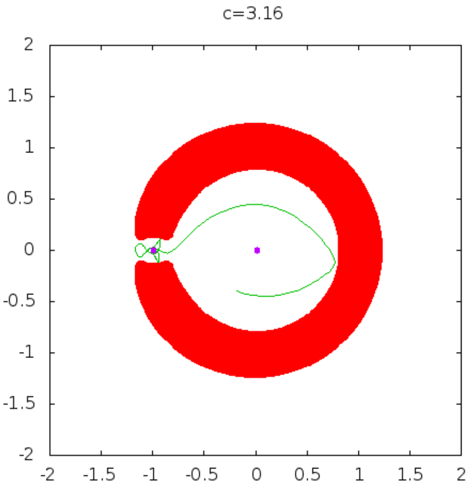
$$C(x, y, v_x, v_y) = -(v_x^2 + v_y^2) + 2\Omega(x, y) = -2E(x, y, v_x, v_y).$$

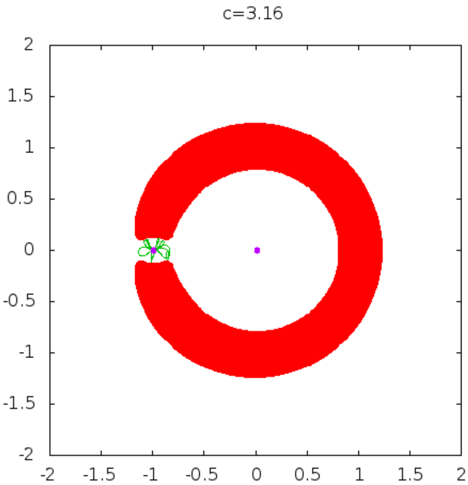
Això ens donarà la primera propietat important, fixat un valor per a la constant de Jacobi tenim una regió en la qual el moviment no és permès.

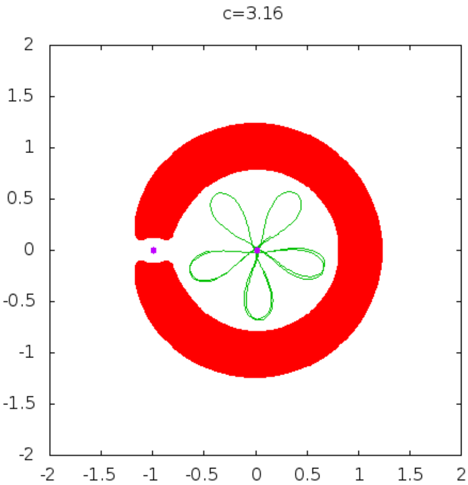


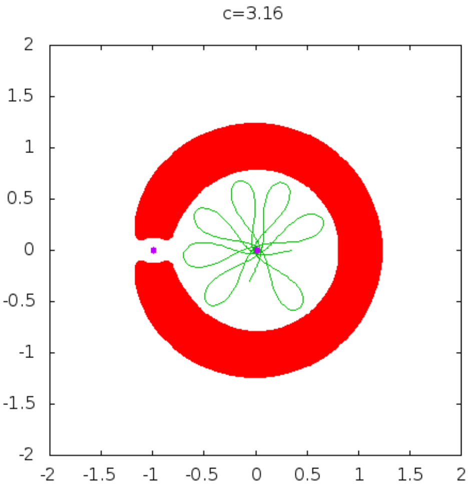

c=3.16
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2


c=3.16
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2


c=3.16
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

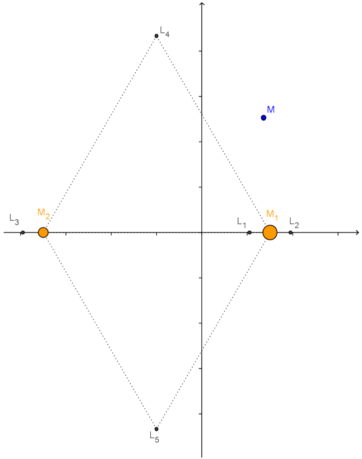

c=3.16
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2


c=3.16
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2


c=3.16
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

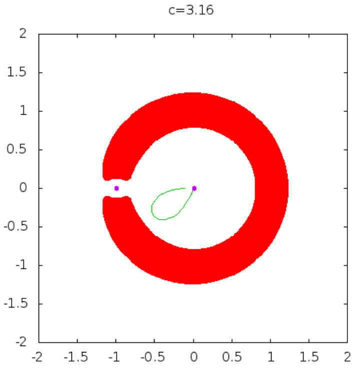
El sistema té 5 punts fixos anomenats punts de Lagrange i designats per L_i:

- 3 són col·lineals amb les dues masses (L_1, L_2, L_3).
- 2 formen triangles equilàters amb les masses (L_4, L_5).



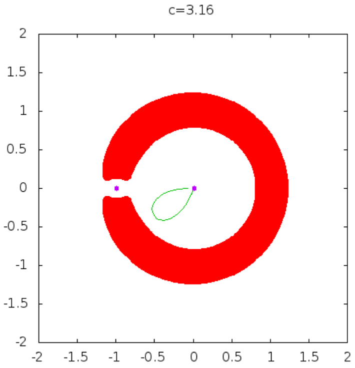
Que ve un cometa!!

Podem experimentar problemes quan el cos d'estudi s'acosta de manera substancial a un dels cossos primaris ja que aleshores la velocitat tendeix a infinit, tenim una col·lisió.



Podem resoldre les col·lisions mitjançant regularitzacions.

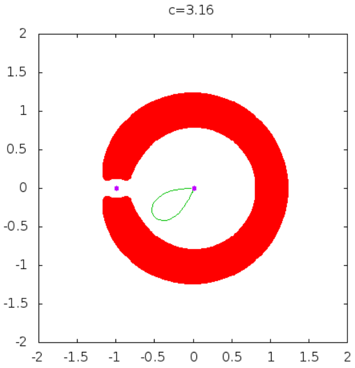
Podem experimentar problemes quan el cos d'estudi s'acosta de manera substancial a un dels cossos primaris ja que aleshores la velocitat tendeix a infinit, tenim una col·lisió.



Podem resoldre les col·lisions mitjançant regularitzacions.

Que ve un cometa!!

Podem experimentar problemes quan el cos d'estudi s'acosta de manera substancial a un dels cossos primaris ja que aleshores la velocitat tendeix a infinit, tenim una col·lisió.

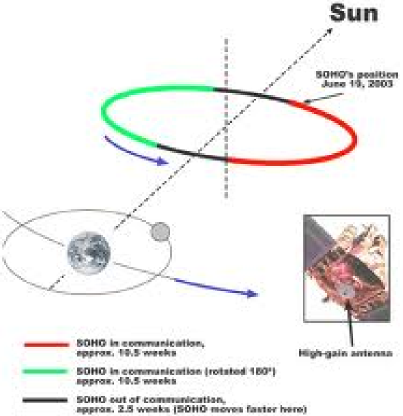


Podem resoldre les col·lisions mitjançant regularitzacions.

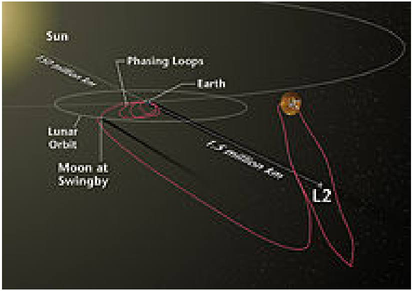
Vegem alguns casos pràctics en els quals les característiques bàsiques es fan servir o s'observen en diferents missions espacials.

- Ús de L_1: El SOHO.
- Ús de L_2: El WMAP.
- Ús de L_3: La "antiterra"?
- Asteroides Troians, la estabilitat de L_4.

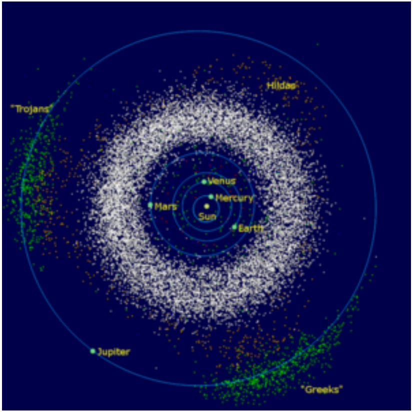
Observacions solars: El SOHO.



El satèl·lit WMAP (Wilknson Microwave Anisotropy Prove) està orbitant al voltant de L_2 per tal de detectar microradiació còsmica de fons.



Al voltant dels punts L_4 i L_5 del sistema Sol-Júpiter es situen un conjunt d'asteroides anomenats Troians (L_5) (i Grecs (L_4)). Cadascun d'aquest rep un nom d'un heroi de la Ilíada.



Entre els troians podem trobar Patroculs, Piamus, Paris, ...
i entre els grecs: Aquiles, Hector, Ajax, Agamenon, ...

En els punts L_4 i L_5 de la Terra hi ha una concentració de pols espacial i recentment s'ha descobert un petit asteroide: 2010 TK7.