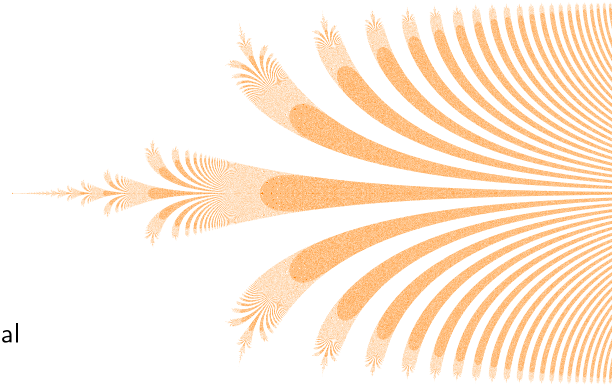
Introducció a la dinàmica holomorfa transcendent

David Martí Pete
Dept. Matemàtica Aplicada i Anàlisi
Universitat de Barcelona

Seminari Informal de Matemàtiques de Barcelona

26 de juny de 2012

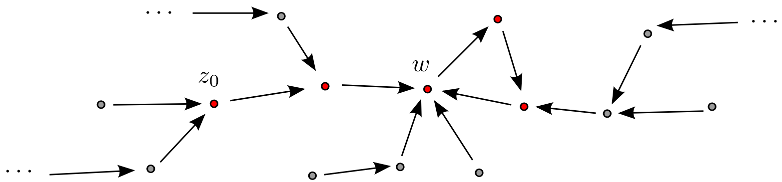
Esquema de la xerrada



1. Introducció
2. La família exponencial
3. Funcions enteres transcendents
4. Funcions holomorfes a $\mathbb{C}^*$

Iteració

La **Dinàmica Complexa** estudia els sistemes dinàmics discrets associats a la iteració de funcions holomorfes en superfícies de Riemann.



Les òrbites són els subconjunts invariants més petits en que podem descomposar l'espai de fase.

La partició dinàmica

Definició

Sigui $\mathscr{F}$ una família de funcions analítiques en un domini Ω. Diem que $\mathscr{F}$ és una **familia normal** (en el sentit de Montel) si tota successió de $\mathscr{F}$ conté una successió parcial que convergeix uniformement en subconjunts compactes de Ω.

La partició dinàmica

Definició

Sigui $\mathscr{F}$ una família de funcions analítiques en un domini Ω. Diem que $\mathscr{F}$ és una **familia normal** (en el sentit de Montel) si tota successió de $\mathscr{F}$ conté una successió parcial que convergeix uniformement en subconjunts compactes de Ω.

Definició

Sigui $D \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ un domini i $f : D \to D$ una funció analítica. Anomenem **conjunt de Fatou** de f, $\mathcal{F}(f)$, al conjunt dels punts que tenen un entorn $U \subseteq D$ on la família d'iterats $\mathscr{F} = \{f^n_{|U}\}_n$ és normal. El seu complementari $\mathcal{J}(f) = D \setminus \mathcal{F}(f)$ s'anomena el **conjunt de Julia** de f.

Propietats de $\mathcal{F}(f)$ i $\mathcal{J}(f)$

Sigui $f : S \subseteq \widehat{\mathbb{C}} \to S$ una funció holomorfa no Möbius, llavors

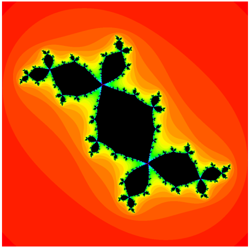
1. $\mathcal{J}(f)$ i $\mathcal{F}(f)$ són completament invariants;
2. $\mathcal{J}(f)$ és tancat i no buit ($\mathcal{F}(f)$ és obert);
3. $\overset{\circ}{\mathcal{J}(f)} \neq \emptyset$ ó $\mathcal{J}(f) = S$;
4. $\mathcal{J}(f)$ és autosemblant ($\rightsquigarrow$ fractal);
5. $\mathcal{J}(f)$ és la clausura del conjunt de punts periòdics repulsors;
6. si $z_0 \in \mathcal{J}(f)$, llavors $\mathcal{O}^-(z_0)$ és dens a $\mathcal{J}(f)$.

Núria Fagella, *Invariants en dinàmica complexa*, Butll. Soc. Cat. Mat. **23** (2008), no. 1, 29-51. `http://www.maia.ub.es/~fagella/Papers/0803fag_inv_din_com_bull.pdf`.

Exemples de polinomis i funcions racionals

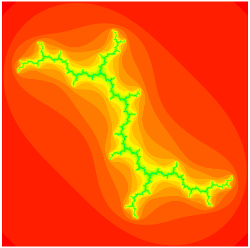
$f(z) = z^2$

Cercle unitat



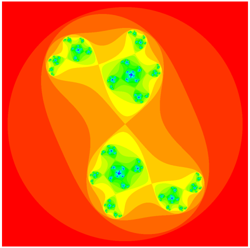
$f(z) = z^2 - 0.12 + 0.74i$

Douady *rabbit*



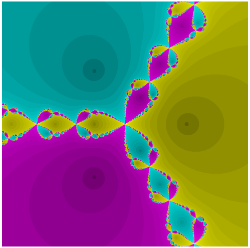
$f(z) = z^2 + i$

Dendrita



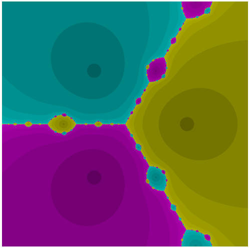
$f(z) = z^2 + 0.486 + 0.54i$

Cantor *dust*



$N_f(z) = z - f(z)/f'(z)$

Mètode de Newton



$H_f(z) = N_{f/\sqrt{f'}}(z)$

Mètode de Halley

$\widehat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{C}^*$

Estudiar una funció holomorfa $f : S \to S$ es redueix als següents casos:

1. $S = \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
   Funcions racionals, f(z)=P(z)/Q(z), sense singularitats essencials.

2. $S = \mathbb{C}$
   Funcions enteres transcendents, ∞ és una singularitat essencial.

3. $S = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
   Funcions per les quals ∞ i 0 són singularitats essencials.

$\widehat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{C}^*$

Estudiar una funció holomorfa $f : S \to S$ es redueix als següents casos:

1. $S = \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
   Funcions racionals, f(z)=P(z)/Q(z), sense singularitats essencials.

2. $S = \mathbb{C}$
   Funcions enteres transcendents, ∞ és una singularitat essencial.

3. $S = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
   Funcions per les quals ∞ i 0 són singularitats essencials.

Teorema (Teorema de Montel)

Si $U \subseteq \mathbb{C}$ i hi han tres punts diferents $a, b, c \in \widehat{\mathbb{C}}$ tals que per tot $n \in \mathbb{N}$ $f^n : U \to \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b, c\}$, llavors $\{f^n_{|U}\}_n$ és una família normal.

Funcions transcendents

Estudiarem funcions transcendents, és a dir, aquelles que tenen alguna **singularitat essencial**, i.e. $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ tal que

- la sèrie de Laurent en un entorn $U \backslash \{\alpha\}$ té infinites potències negatives de $z - \alpha$:
$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - \alpha)^n;$$
- no existeix el límit
$$f(\alpha) = \lim_{z \to \alpha} f(z).$$

Funcions transcendents

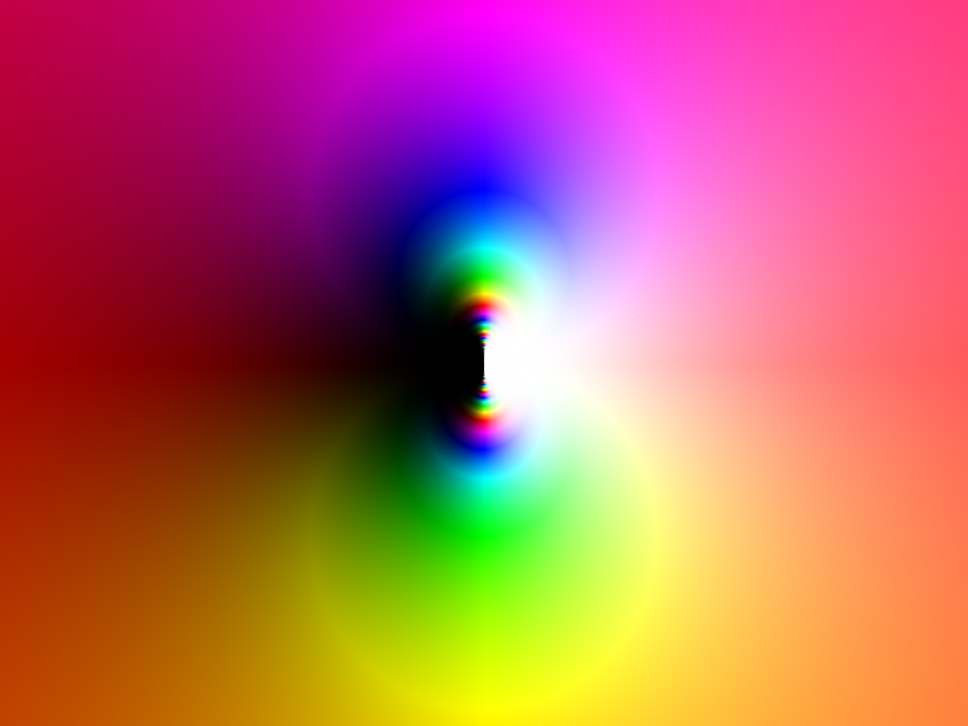
Estudiarem funcions transcendents, és a dir, aquelles que tenen alguna **singularitat essencial**, i.e. $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ tal que

- la sèrie de Laurent en un entorn $U \setminus \{\alpha\}$ té infinites potències negatives de $z - \alpha$:
$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - \alpha)^n;$$
- no existeix el límit
$$f(\alpha) = \lim_{z \to \alpha} f(z).$$

Teorema (**Teorema gran de Picard**)

Si una funció analítica f té una singularitat essencial en un punt $z = \alpha$, llavors en qualsevol entorn obert de α la funció f pren tots els valors complexos llevat, potser, d'un punt i, a més, ho fa infinites vegades.

El punt $z = \infty$ és una singularitat essencial per $f(z) = \exp(z)$ i, per tant, $z = 0$ és una singularitat essencial per $g(z) = \exp(1/z)$.



Valors singulars

Definició

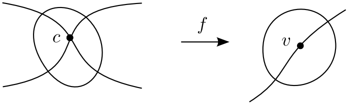
$w \in \widehat{\mathbb{C}}$ és un **valor singular** de $f : S \subseteq \widehat{\mathbb{C}} \to S$ si per tot entorn obert U de w, existeix una component connexa V de $f^{-1}(U)$ tal que $f : V \to U$ no és bijectiva. Denotarem el conjunt de valors singulars de f per $S(f)$.

Valors singulars

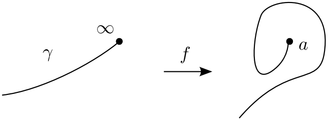
Definició

$w \in \widehat{\mathbb{C}}$ és un **valor singular** de $f : S \subseteq \widehat{\mathbb{C}} \to S$ si per tot entorn obert U de w, existeix una component connexa V de $f^{-1}(U)$ tal que $f : V \to U$ no és bijectiva. Denotarem el conjunt de valors singulars de f per $S(f)$.

- $v \in \widehat{\mathbb{C}}$ és un **valor crític** de f si és la imatge d'un punt crític, i.e. $\exists c \in \widehat{\mathbb{C}}$ tal que $f'(c) = 0$ i
$$f(c) = v.$$



- $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ és un **valor asimptòtic** de f si existeix una corba $\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ que tendeixi a una singularitat essencial i
$$\lim_{t \to \infty} f(\gamma(t)) = a.$$



La família exponencial

$$e_\lambda(z) := \lambda \exp(z),\ \lambda \in \mathbb{C}^*, \quad E_a(z) := \exp(z) + a,\ a \in \mathbb{C} \quad (\text{conj. si } \lambda = e^a)$$

Robert L. Devaney and Folkert Tangerman, *Dynamics of entire functions near the essential singularity*, Ergodic Theory Dynam. Systems **6** (1986), no. 4, 489-503.

Robert L. Devaney, *Cantor bouquets, explosions, and Knaster continua: dynamics of complex exponentials*, Publ. Mat. **43** (1999), no. 1, 27-54.

La família exponencial

$e_\lambda(z) := \lambda \exp(z),\ \lambda \in \mathbb{C}^*, \quad E_a(z) := \exp(z) + a,\ a \in \mathbb{C} \quad (\text{conj. si } \lambda = e^a)$

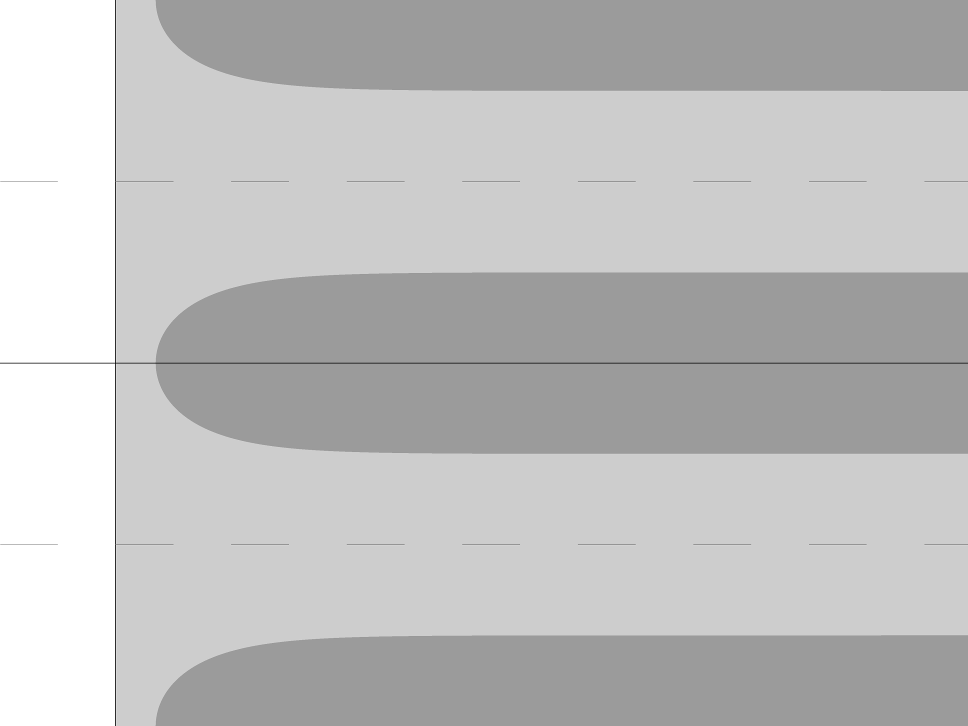
El cas més senzill: $f(z) = \exp(z) - 2$.

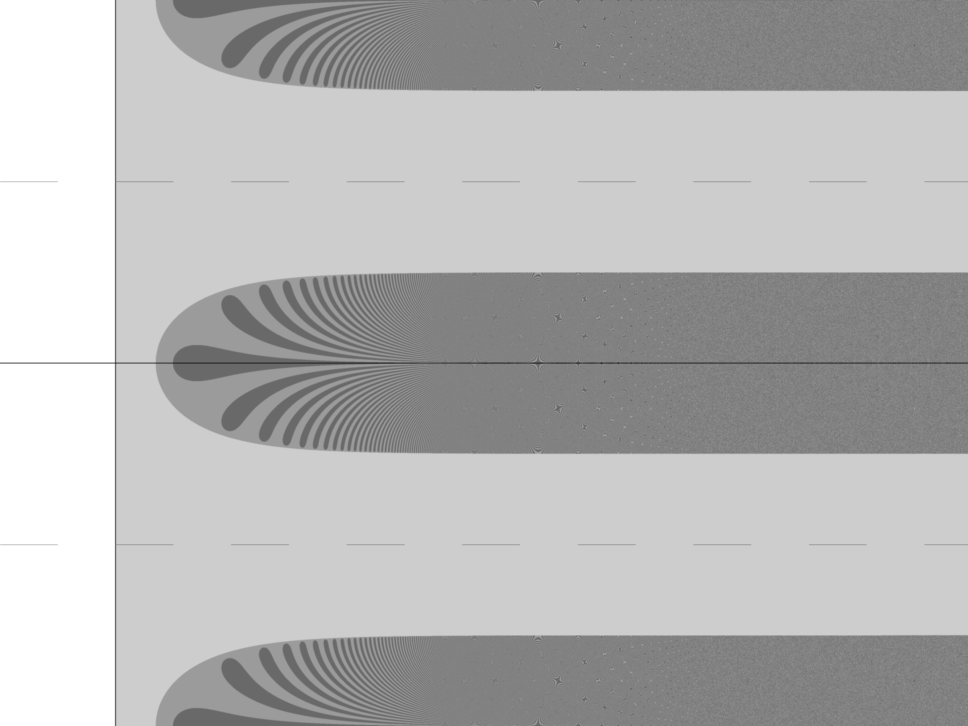
- $f_{|\mathbb{R}}$ té 2 punts fixos: $p_a < -1$ (atractor) i $p_r > 1$ (repulsor);
- $f(i\mathbb{H}) = \exp(i\mathbb{H}) - 2 = \mathbb{D} - 2 = D(-2, 1) \subseteq i\mathbb{H} \quad \Rightarrow \quad i\mathbb{H} \subseteq \mathcal{A}^*(p_a)$;
- $f^{-1}(-i\mathbb{H}) \subseteq B_k = \{z \in \mathbb{C} \ : \ (2k-1)\pi < z < (2k+1)\pi\}, \forall k \in \mathbb{Z}$;

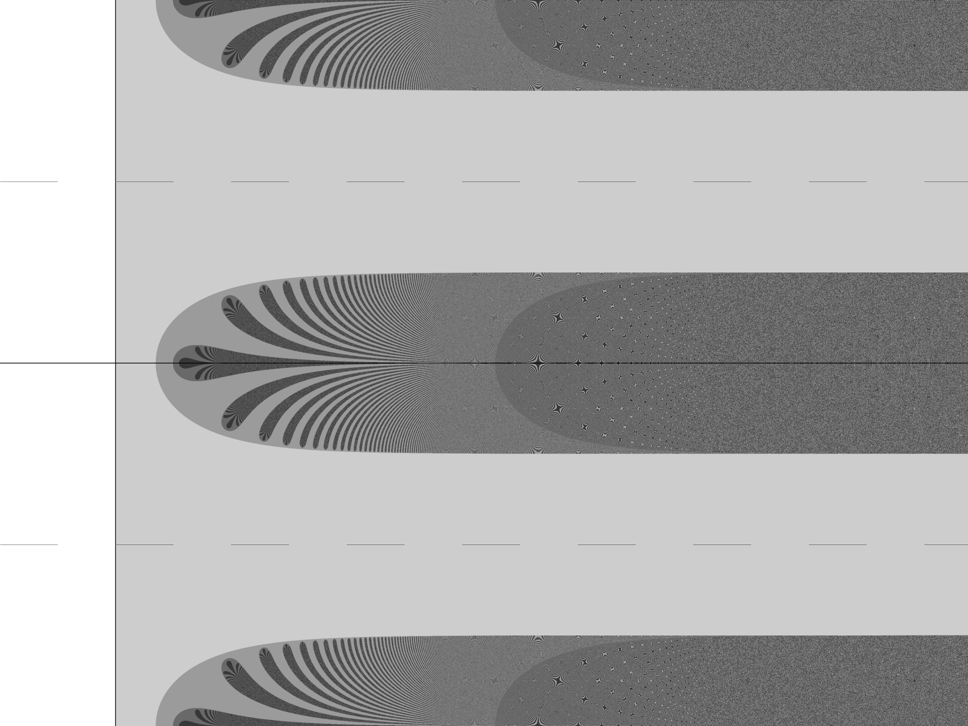
$$\mathcal{J}(f) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \forall n \in \mathbb{N},\ f^n(z) \in (-i)\mathbb{H}\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(-i\mathbb{H}).$$

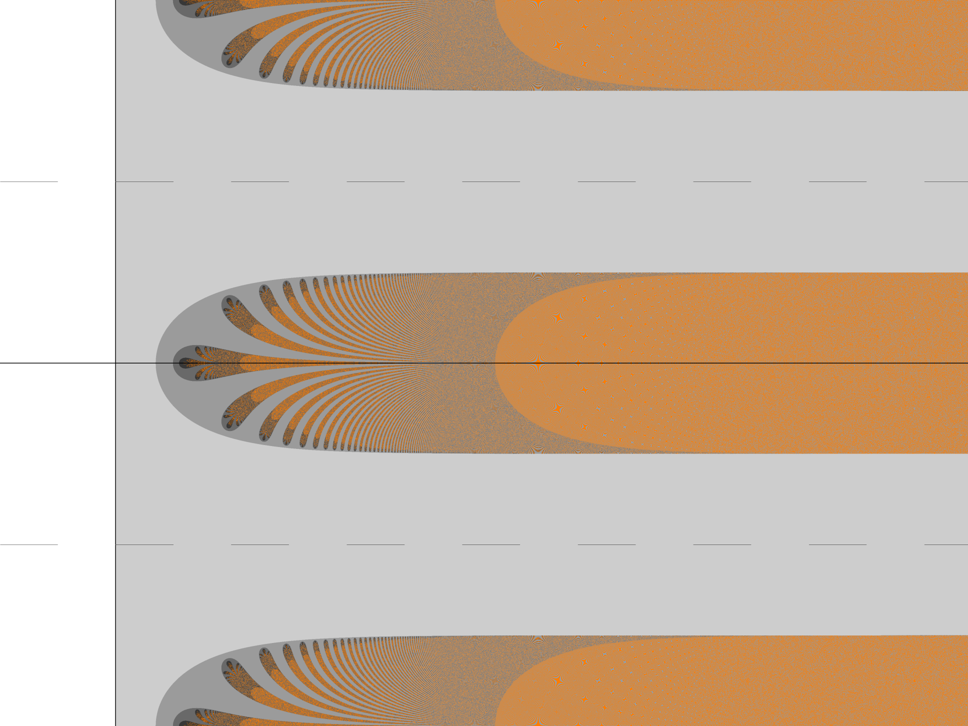
Robert L. Devaney and Folkert Tangerman, *Dynamics of entire functions near the essential singularity*, Ergodic Theory Dynam. Systems **6** (1986), no. 4, 489-503.

Robert L. Devaney, *Cantor bouquets, explosions, and Knaster continua: dynamics of complex exponentials*, Publ. Mat. **43** (1999), no. 1, 27-54.









Què és un Cantor *bouquet*?

Definició

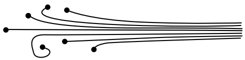
Un ***straight brush*** és un subconjunt B de $[0,\infty)\times(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\subseteq\mathbb{R}^2$ tal que

- $\forall(y,\alpha)\in B,\ \exists t_\alpha\in[0,\infty)$ tal que $\{t\ :\ (t,\alpha)\in B\}=[t_\alpha,\infty)$;
- el conjunt $\{\alpha\ :\ \exists y,\ (y,\alpha)\in B\}$ és dens a $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ i $\forall(y,\alpha)\in B$, $\exists(\beta_n)_n,(\gamma_n)_n\subseteq\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\ \beta_n\nearrow\alpha,\ \gamma_n\searrow\alpha$ tals que $t_{\beta_n},t_{\gamma_n}\to t_\alpha$;
- B és un subconjunt tancat de $\mathbb{R}^2$.

Un **Cantor *bouquet*** és un conjunt homeomorf a un *straight brush*.

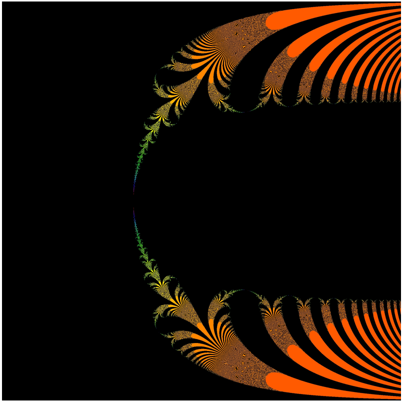
Propietats topològiques:

- té dimensió de Hausdorff 2, tot i tenir mesura de Lebesgue 0;
- si Λ és el conjunt de punts extrem $e_\alpha=(t_\alpha,\alpha)$, Λ és un conjunt totalment disconnex, peró $\Lambda\cup\{\infty\}$ és connex!



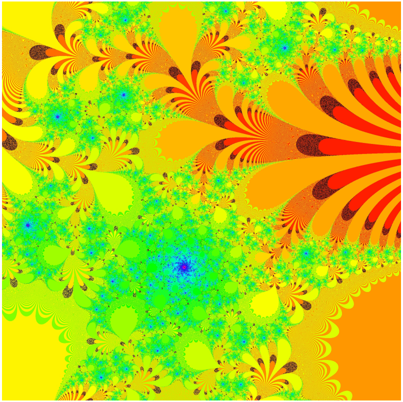
Jan M. Aarts and Lex G. Oversteegen, *The geometry of Julia sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **338** (1993), 897-918.

Altres membres de la família exponencial



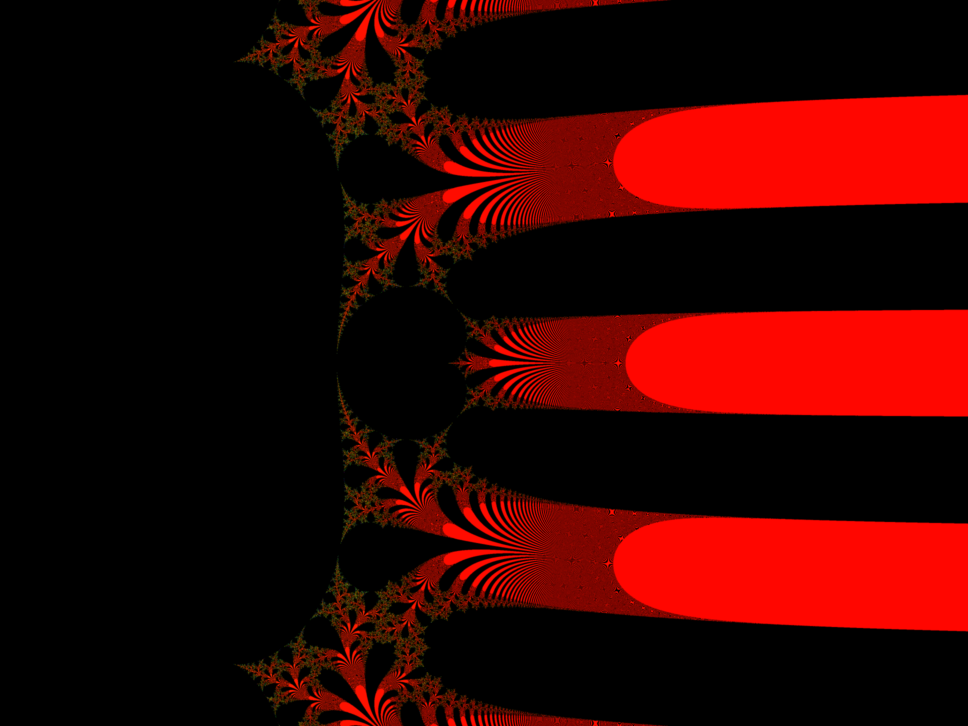
$f(z) = -\pi \exp(z)$

$\mathcal{J}(f)$ és un Cantor *bouquet*



$f(z) = (1-i)\exp(z)$

$\mathcal{J}(f) = \mathbb{C}$



Els inicis... Fatou

El 1926 Pierre Fatou va observar que per algunes funcions concretes (e.g. $f(z) = r\sin(z),\ r \in \mathbb{R}$) el conjunt de Julia conté corbes de punts que escapen a infinit al iterar-los.

> *Il serait interéssant de rechercher si cette propriété n'appartiendrait pas à des substitutions beaucoup plus générales.*

Pierre Fatou, *Sur l'itération des fonctions transcendantes entières*, Acta Math. **47** (1926), 337-370.

Escaping set

El 1989 Alexandre Eremenko inicia l'estudi d'aquest conjunt de punts que escapen a infinit.

Definició

L'***escaping set*** d'una funció entera transcendent f és

$$\mathcal{I}(f) := \{z \in \mathbb{C} \ : \ f^n(z) \to \infty\}.$$

Escaping set

El 1989 Alexandre Eremenko inicia l'estudi d'aquest conjunt de punts que escapen a infinit.

Definició

L'***escaping set*** d'una funció entera transcendent f és

$$\mathcal{I}(f) := \{z \in \mathbb{C} \ : \ f^n(z) \to \infty\}.$$

- La **classe d'Eremenko-Lyubich** $\mathcal{B}$ està formada per les funcions enteres transcendents f tals que $S(f)$ està acotat.

Propietats de $\mathcal{I}(f)$

Sigui f : una funció entera transcendent, llavors

1. $\mathcal{I}(f) \cap \mathcal{J}(f) \neq \emptyset$;
2. $\mathcal{J}(f) = \partial \mathcal{I}(f)$;
3. les components connexes de $\overline{\mathcal{I}(f)}$ són no acotades;
4. si $f \in \mathcal{B}$ llavors $\mathcal{I}(f) \subseteq \mathcal{J}(f)$ i, en particular, $\mathcal{I}(f)$ no té interior.

Alexandre E. Eremenko, *On the iteration of entire functions*, Dynamical Systems and Ergodic Theory, Banach Center Publ. **23** (1989), 339-345.

Propietats de $\mathcal{I}(f)$

Sigui f : una funció entera transcendent, llavors

1. $\mathcal{I}(f) \cap \mathcal{J}(f) \neq \emptyset$;
2. $\mathcal{J}(f) = \partial\mathcal{I}(f)$;
3. les components connexes de $\overline{\mathcal{I}(f)}$ són no acotades;
4. si $f \in \mathcal{B}$ llavors $\mathcal{I}(f) \subseteq \mathcal{J}(f)$ i, en particular, $\mathcal{I}(f)$ no té interior.

Eremenko escriu:

> “*It is plausible that the set $\mathcal{I}(f)$ always has the following property: every point $z \in \mathcal{I}(f)$ can be joined with ∞ by a curve in $\mathcal{I}(f)$.*”

Alexandre E. Eremenko, *On the iteration of entire functions*, Dynamical Systems and Ergodic Theory, Banach Center Publ. **23** (1989), 339-345.

- L'**ordre** d'una funció entera es defineix com

$$\rho(f) := \lim_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r}, \quad \text{on } M(r,f) = \sup_{|z|\leqslant r} |f(z)| = \sup_{|z|=r} |f(z)|.$$

Exemples: si $k \in \mathbb{N}$, $\rho(\exp(z^k)) = k$ i $\rho(\exp(\exp(z))) = \infty$.

Teorema (RRRS 2011)

Sigui f una funció de classe $\mathcal{B}$ d'ordre finit, o més en general, una composició finita d'aquest tipus de funcions. Llavors, tot punt $z \in \mathcal{I}(f)$ es pot connectar amb ∞ per una corba γ tal que $f^n_{|\gamma} \to \infty$ uniformement.

Günter Rottenfußer, Johannes Rückert, Lasse Rempe, and Dierk Schleicher, *Dynamic rays of bounded-type entire functions*, Ann. of Math. (2) **173** (2011), no. 1, 77-125.

Esquema de la demostració

1. Si $S(f) \subseteq D$, s'introdueix una **dinàmica simbòlica** en el conjunt de ***tracts*** $\mathcal{T} := f^{-1}(\mathbb{C} \setminus D)$.

2. Utilitzant unes **coordenades logarítmiques** i la **mètrica hiperbòlica** es prova una propietat d'**expansivitat**.

3. Una condició tècnica (la ***head-start condition***) fa que els punts de l'**escaping set** amb el mateix itinerari estiguin **ordenats per la velocitat d'escapament**.

4. Es busquen unes **bones condicions geomètriques** sobre els tracts (**pendent acotat** i ***wiggling*** **acotat uniformement**) que fan que es satisfaci una *head-start condition* lineal.

5. L'**ordre finit** controla el **creixement de la funció** en un entorn de la singularitat essencial i implica les condicions geomètriques anteriors.

- Diem que una funció és **hiperbòlica** si el *postsingular set*

$$\mathcal{P}(f) := \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^n(S(f))}$$

és un subconjunt compacte del conjunt de Fatou $\mathcal{F}(f)$.

Teorema (BJR 2012)

Sigui f una funció de classe $\mathcal{B}$ d'ordre finit, o més en general, una composició finita d'aquest tipus de funcions. Si f és hiperbòlica i té una única component de Fatou, llavors el seu conjunt de Julia $\mathcal{J}(f)$ és un Cantor bouquet.

Krzysztof Barański, Xavier Jarque, and Lasse Rempe, *Brushing the hairs of transcendental entire functions*, Topology Appl. **159** (2012), no. 8, 2102-2114.

Funcions holomorfes a $\mathbb{C}^*$

Volem estudiar la classe de les funcions holomorfes a $\mathbb{C}^*$ per les quals tant ∞ com 0 són singularitats essencials.

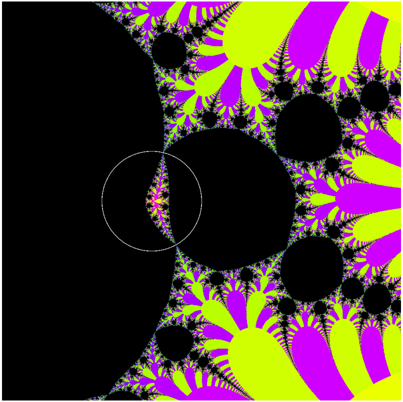
- Són de la forma $f(z) = z^n \exp(g(z) + h(1/z))$ amb g i h funcions enteres no constants.
- Si g és el *lift* de f, i.e. $\exp f(z) = g(\exp z)$ llavors W. Bergweiler va provar que
$$\exp^{-1} \mathcal{J}(g) = \mathcal{J}(f).$$
- **Problema**: el seu *lift* en general no serà de classe $\mathcal{B}$.
- En aquest context, l'*escaping set* està format per punts que s'acumulen en 0 i ∞, i el concepte d'ordre s'ha de modificar per controlar també el decreixement de la funció.

Exemple

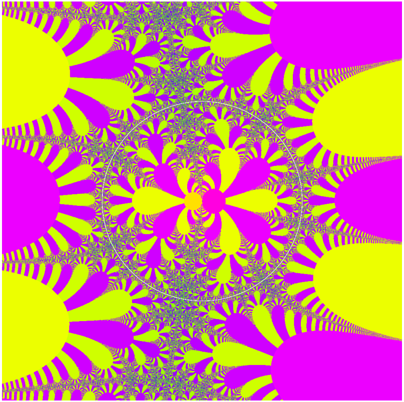
La complexificació de la **família estandard** d'Arnol'd

$$F_{\alpha\beta}(\theta) = \theta + \alpha + \beta \sin(\theta) \pmod{2\pi}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

són funcions holomorfes trancendents de $\mathbb{C}^*$: $\widehat{F}_{\alpha\beta}(w) = we^{i\alpha}e^{\beta(w-1/w)/2}$.



$\alpha = 3.1, \ \beta = 0.8.$



$\alpha = 3.1, \ \beta = 5.$

φ

Gràcies per la vostra atenció!