Teoria d'Operadors en Espais de Fock

Roc Oliver Vendrell

SIMBa
Seminari Informal
de Matemàtiques de Barcelona

Universitat de Barcelona

4 de desembre de 2013

Contents

Contents

Notació

A partir d'ara treballem en l'espai complex $\mathbb{C}$ i totes les funcions que apareguin

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

seran de variable complexa a variable complexa. Denotem per $\mathrm{d}A$ la mesura d'àrea de Lebesgue, és a dir,

$$\mathrm{d}A(z) = \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta$$

on $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Denotem $D(z, r)$ o $D^r(z)$ un disc de centre z i radi $r > 0$.

Notació

A partir d'ara treballem en l'espai complex $\mathbb{C}$ i totes les funcions que apareguin

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

seran de variable complexa a variable complexa. Denotem per $\mathrm{d}A$ la mesura d'àrea de Lebesgue, és a dir,

$$\mathrm{d}A(z) = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

on $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Denotem $D(z, r)$ o $D^r(z)$ un disc de centre z i radi $r > 0$.

Operadors Diferencials

Sigui $z = x + iy \in \mathbb{C}$ amb $x, y \in \mathbb{R}$ definim els operadors de Wirtinger com

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

i

$$\overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Exemple. Si prenem $f(z) = z = x + iy$ aleshores

- $\partial f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} z - i\frac{\partial}{\partial y} z\right) = \frac{1}{2}(1 - i^2) = 1.$
- $\overline{\partial} f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} z + i\frac{\partial}{\partial y} z\right) = \frac{1}{2}(1 + i^2) = 0.$

Operadors Diferencials

Sigui $z = x + iy \in \mathbb{C}$ amb $x, y \in \mathbb{R}$ definim els operadors de Wirtinger com

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

i

$$\overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Exemple. Si prenem $f(z) = z = x + iy$ aleshores

- $\partial f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}z - i\frac{\partial}{\partial y}z\right) = \frac{1}{2}(1 - i^2) = 1.$
- $\overline{\partial} f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}z + i\frac{\partial}{\partial y}z\right) = \frac{1}{2}(1 + i^2) = 0.$

Funcions Holomorfes

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domini (obert i connex). Es diu que una funció $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ és *holomorfa* en el domini Ω si

$$\overline{\partial} f = 0$$

en Ω. Si $f = u + iv$ tenim que això és equivalent a les equacions de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \partial_x u = \partial_y v \\ \partial_y u = -\partial_x v. \end{cases}$$

Exemples.

- Són holomorfes $z, z^m, \mathrm{e}^z, \ldots$
- No ho són $\overline{z}, |z|, \mathrm{e}^{|z|}, \ldots$

Funcions Holomorfes

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domini (obert i connex). Es diu que una funció $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ és *holomorfa* en el domini Ω si

$$\overline{\partial} f = 0$$

en Ω. Si $f = u + iv$ tenim que això és equivalent a les equacions de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \partial_x u = \partial_y v \\ \partial_y u = -\partial_x v. \end{cases}$$

Exemples.

- Són holomorfes $z, z^m, \mathrm{e}^z, \dots$
- No ho són $\overline{z}, |z|, \mathrm{e}^{|z|}, \dots$

Funcions Holomorfes

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domini (obert i connex). Es diu que una funció $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ és *holomorfa* en el domini Ω si

$$\overline{\partial} f = 0$$

en Ω. Si $f = u + iv$ tenim que això és equivalent a les equacions de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \partial_x u = \partial_y v \\ \partial_y u = -\partial_x v. \end{cases}$$

Exemples.

- Són holomorfes $z, z^m, \mathrm{e}^z, \ldots$
- No ho són $\overline{z}, |z|, \mathrm{e}^{|z|}, \ldots$

Teorema de Green

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domini prou bo. Aleshores

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\mathrm{d}z = 2i\int_{\Omega} \overline{\partial} f(z)\mathrm{d}A(z).$$

Idea prova: Aplicar la formula de Green habitual

$$\int_{\partial\Omega} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

amb $P = f$ i $Q = if$.

Teorema de Green

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domini prou bo. Aleshores

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\mathrm{d}z = 2i \int_{\Omega} \overline{\partial} f(z)\mathrm{d}A(z).$$

Idea prova: Aplicar la formula de Green habitual

$$\int_{\partial\Omega} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

amb $P = f$ i $Q = if$.

Formula de Cauchy-Green

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ prou bo i $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Aleshores

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w - \frac{1}{\pi}\int_{\Omega} \frac{\overline{\partial} f(w)}{w-z}\mathrm{d}A(w)$$

per tot $z \in \Omega$.

Idea prova: Aplicar Teorema de Green a la funció $g_z(w) = \frac{f(w)}{w-z}$ en $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{D}(z,\varepsilon)$ i fer $\varepsilon \to 0$.

Formula de Cauchy-Green

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ prou bo i $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Aleshores

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w - \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{\overline{\partial} f(w)}{w-z} \mathrm{d}A(w)$$

per tot $z \in \Omega$.

Idea prova: Aplicar Teorema de Green a la funció $g_z(w) = \frac{f(w)}{w-z}$ en $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{D}(z, \varepsilon)$ i fer $\varepsilon \to 0$.

Corol·lari Holomorfes

Notem que si f és holomorfa en Ω tenim que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w, \quad z \in \Omega.$$

Un cas interessant és aplicat a discs $\Omega = D(z, r)$ amb $r > 0$ i passant a polars queda

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + r\mathrm{e}^{i\theta}) \mathrm{d}\theta$$

fent el canvi $w = z + r\mathrm{e}^{i\theta}$.

Corol·lari Holomorfes

Notem que si f és holomorfa en Ω tenim que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(w)}{w - z} \mathrm{d}w, \quad z \in \Omega.$$

Un cas interessant és aplicat a discs $\Omega = D(z, r)$ amb $r > 0$ i passant a polars queda

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} \frac{f(w)}{w - z} \mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + r\mathrm{e}^{i\theta}) \mathrm{d}\theta$$

fent el canvi $w = z + r\mathrm{e}^{i\theta}$.

Propietat del Valor Mitjà

Multiplicant per $0 < \rho < r$ a l'expressió anterior i integrant entre 0 i r obtenim

$$\int_0^r f(z)\rho \mathrm{d}\rho = \frac{1}{2\pi}\int_0^r \int_0^{2\pi} f(z+\rho \mathrm{e}^{i\theta})\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\rho$$

que implica

$$f(z) = \frac{1}{r^2\pi}\int_{D(z,r)} f(w)\mathrm{d}A(w).$$

Així obtenim l'estimació desitjada de funcions holomorfes. També tenim, per tot valor $1 \leq p < \infty$,

$$|f(z)|^p \leq \frac{1}{r^2\pi}\int_{D(z,r)} |f(w)|^p \,\mathrm{d}A(w).$$

Propietat del Valor Mitjà

Multiplicant per $0 < \rho < r$ a l'expressió anterior i integrant entre 0 i r obtenim

$$\int_0^r f(z)\rho \mathrm{d}\rho = \frac{1}{2\pi}\int_0^r \int_0^{2\pi} f(z+\rho \mathrm{e}^{i\theta})\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\rho$$

que implica

$$f(z) = \frac{1}{r^2\pi}\int_{D(z,r)} f(w)\mathrm{d}A(w).$$

Així obtenim l'estimació desitjada de funcions holomorfes. També tenim, per tot valor $1 \leq p < \infty$,

$$|f(z)|^p \leq \frac{1}{r^2\pi}\int_{D(z,r)} |f(w)|^p \, \mathrm{d}A(w).$$

Espais de funcions L^p

Sigui $1 \leq p < +\infty$ definim

$$L^p := \left\{ f \text{ mesurable} \colon \ \|f\|_p^p = \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^p \, \mathrm{d}A(z) < +\infty \right\}$$

i per $p = +\infty$

$$L^\infty := \left\{ f \text{ mesurable} \colon \ \|f\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| < +\infty \right\}.$$

És arxiconegut que els espais L^p són Banach (normat + complet).

Espais de funcions L^p

Sigui $1 \leq p < +\infty$ definim

$$L^p := \left\{ f \text{ mesurable}\colon\ \|f\|_p^p = \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^p \, \mathrm{d}A(z) < +\infty \right\}$$

i per $p = +\infty$

$$L^\infty := \left\{ f \text{ mesurable}\colon\ \|f\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| < +\infty \right\}.$$

És arxiconegut que els espais L^p són Banach (normat + complet).

Operador Acotat

Donada una aplicació lineal

$$T\colon E \longrightarrow F$$

entre dos espais vectorial normats E i F, direm que T és un *operador acotat* si existeix una constant $C > 0$ tal que

$$\|T(f)\|_F \leq C\,\|f\|_E$$

per tota $f \in E$.

Operador Compacte

Direm que un operador lineal

$$T\colon E \longrightarrow F$$

entre dos espais de Banach E i F, és un *operador compacte* si tota imatge d'un subconjunt acotat L de E és un subconjunt relativament compacte de F, i.e., $\overline{T(L)}$ és compacte.

És relativament fàcil veure que tot operador compacte és acotat.

Operador Compacte

Direm que un operador lineal

$$T\colon E \longrightarrow F$$

entre dos espais de Banach E i F, és un *operador compacte* si tota imatge d'un subconjunt acotat L de E és un subconjunt relativament compacte de F, i.e., $\overline{T(L)}$ és compacte.
És relativament fàcil veure que tot operador compacte és acotat.

Classe de Schatten

Sigui H un espai de Hilbert amb producte escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ i $T\colon H\to H$ un operador lineal i compacte. Suposem també que T és auto-adjunt, és a dir, per tot $f,g\in H$ tenim $\langle Tf,g\rangle_H=\langle f,Tg\rangle$. Direm que $T\in\mathcal{S}_p(H)$, $0<p<\infty$ si els seus valors propis $(\lambda_n)_n$ pertanyen a ℓ^p, i.e.,

$$\|T\|_{\mathcal{S}_p}:=\left(\sum_n|\lambda_n|^p\right)^{1/p}<\infty.$$

El cas $p=1$ és diuen operadors de la classe de traça i per $p=2$ és diuen els operadors de Hilbert-Schmidt.

Classe de Schatten

Sigui H un espai de Hilbert amb producte escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ i $T\colon H \to H$ un operador lineal i compacte. Suposem també que T és auto-adjunt, és a dir, per tot $f, g \in H$ tenim $\langle Tf, g \rangle_H = \langle f, Tg \rangle$. Direm que $T \in \mathcal{S}_p(H)$, $0 < p < \infty$ si els seus valors propis $(\lambda_n)_n$ pertanyen a ℓ^p, i.e.,

$$\|T\|_{\mathcal{S}_p} := \left(\sum_n |\lambda_n|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

El cas $p = 1$ és diuen operadors de la classe de traça i per $p = 2$ és diuen els operadors de Hilbert-Schmidt.

Classe de Schatten

Sigui H un espai de Hilbert amb producte escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ i $T\colon H \to H$ un operador lineal i compacte. Suposem també que T és auto-adjunt, és a dir, per tot $f, g \in H$ tenim $\langle Tf, g \rangle_H = \langle f, Tg \rangle$. Direm que $T \in \mathcal{S}_p(H)$, $0 < p < \infty$ si els seus valors propis $(\lambda_n)_n$ pertanyen a ℓ^p, i.e.,

$$\|T\|_{\mathcal{S}_p} := \left(\sum_n |\lambda_n|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

El cas $p = 1$ és diuen operadors de la classe de traça i per $p = 2$ és diuen els operadors de Hilbert-Schmidt.

Classe de Schatten

Sigui H un espai de Hilbert amb producte escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ i $T\colon H \to H$ un operador lineal i compacte. Suposem també que T és auto-adjunt, és a dir, per tot $f, g \in H$ tenim $\langle Tf, g \rangle_H = \langle f, Tg \rangle$. Direm que $T \in \mathcal{S}_p(H)$, $0 < p < \infty$ si els seus valors propis $(\lambda_n)_n$ pertanyen a ℓ^p, i.e.,

$$\|T\|_{\mathcal{S}_p} := \left(\sum_n |\lambda_n|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

El cas $p = 1$ és diuen operadors de la classe de traça i per $p = 2$ és diuen els operadors de Hilbert-Schmidt.

Teorema de la Projecció

Sigui $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ un espai de Hilbert i sigui F un subespai tancat de H. Aleshores

- Per tot $f \in H$, existeix un únic $g \in F$ tal que

$$d(f, F) = \|f - g\|_H \,.$$

  Direm que $P_F(f) := g$.

- El projector $P_F \colon H \to F$ és un operador lineal i continu tal que $P_F^2 = P_F$ i auto-adjunt, i.e.,

$$\langle P_F(f), g \rangle_H = \langle f, P_F(g) \rangle_H$$

  per tot $f, g \in H$.

- $H = F \oplus F^{\perp}$ on $F^{\perp} := \{f \in H \colon \langle f, g \rangle_H = 0, \forall g \in F\}$.

- ...

Teorema de la Projecció

Sigui $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ un espai de Hilbert i sigui F un subespai tancat de H. Aleshores

- Per tot $f \in H$, existeix un únic $g \in F$ tal que

$$d(f, F) = \|f - g\|_H \,.$$

  Direm que $P_F(f) := g$.
- El projector $P_F \colon H \to F$ és un operador lineal i continu tal que $P_F^2 = P_F$ i auto-adjunt, i.e.,

$$\langle P_F(f), g \rangle_H = \langle f, P_F(g) \rangle_H$$

  per tot $f, g \in H$.
- $H = F \oplus F^\perp$ on $F^\perp := \{f \in H \colon \langle f, g \rangle_H = 0, \forall g \in F\}$.
- ...

Teorema de la Projecció

Sigui $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ un espai de Hilbert i sigui F un subespai tancat de H. Aleshores

- Per tot $f \in H$, existeix un únic $g \in F$ tal que
$$d(f, F) = \|f - g\|_H \, .$$
Direm que $P_F(f) := g$.
- El projector $P_F \colon H \to F$ és un operador lineal i continu tal que $P_F^2 = P_F$ i auto-adjunt, i.e.,
$$\langle P_F(f), g \rangle_H = \langle f, P_F(g) \rangle_H$$
per tot $f, g \in H$.
- $H = F \oplus F^{\perp}$ on $F^{\perp} := \{f \in H \colon \langle f, g \rangle_H = 0, \forall g \in F\}$.
- $\ldots$

Teorema de Riesz

Sigui H un espai de Hilbert i $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_H$ el seu producte escalar. Per cada funcional $u \in H^*$, i.e., $u\colon H \to \mathbb{C}$ lineal i acotat, existeix un únic element $g \in H$ tal que

$$u(f) = \langle f, g \rangle_H$$

per tot $f \in H$. A més, tenim que $\|u\| = \|g\|_H$.

Idea prova: Aplicar el Teorema de la Projecció a $F := \operatorname{Ker} u$ subespai tancat de H.

Teorema de Riesz

Sigui H un espai de Hilbert i $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_H$ el seu producte escalar. Per cada funcional $u \in H^*$, i.e., $u\colon H \to \mathbb{C}$ lineal i acotat, existeix un únic element $g \in H$ tal que

$$u(f) = \langle f, g \rangle_H$$

per tot $f \in H$. A més, tenim que $\|u\| = \|g\|_H$.

Idea prova: Aplicar el Teorema de la Projecció a $F := \operatorname{Ker} u$ subespai tancat de H.

Contents

Notació Espais L^p_ϕ

Sigui $\phi\colon \mathbb{C} \to [-\infty, +\infty)$ una funció prou bona ("subharmònic"). Definim

$$L^p_\phi := \left\{ f \text{ mesurable} \colon f\mathrm{e}^{-\phi} \in L^p \right\}$$

dotat de la norma

$$\|f\|^p_{p,\phi} := \int_{\mathbb{C}} \left| f(z)\mathrm{e}^{-\phi(z)} \right|^p \mathrm{d}A(z).$$

Observem que $L^p_\phi(\mathbb{C}) = L^p(\mathbb{C}, \mathrm{e}^{-p\phi})$ i, per tant, L^p_ϕ són espais de Banach.

Notació Espais L^p_ϕ

Sigui $\phi\colon \mathbb{C} \to [-\infty, +\infty)$ una funció prou bona ("subharmònic"). Definim

$$L^p_\phi := \left\{ f \text{ mesurable: } f e^{-\phi} \in L^p \right\}$$

dotat de la norma

$$\|f\|^p_{p,\phi} := \int_{\mathbb{C}} \left| f(z) e^{-\phi(z)} \right|^p \mathrm{d}A(z).$$

Observem que $L^p_\phi(\mathbb{C}) = L^p(\mathbb{C}, e^{-p\phi})$ i, per tant, L^p_ϕ són espais de Banach.

Espais de Fock

Definim els espais de Fock generals amb pes

$$F_\phi^p := \left\{ f \text{ entera} \colon f \in L_\phi^p \right\}$$

dotats de la mateixa norma que L_ϕ^p, $\|\cdot\|_{p,\phi}$.
Es pot veure que els espais de Fock $F_\phi^p \subset L_\phi^p$ son tancats en L_ϕ^p i per tant són Banach per $1 \leq p \leq +\infty$. El cas interessant $p = 2$, F_ϕ^2 és un espai de Hilbert amb el següent producte escalar

$$\langle f, g \rangle_\phi = \int_{\mathbb{C}} f(z)\overline{g(z)} \mathrm{e}^{-2\phi(z)} \mathrm{d}A(z).$$

Espais de Fock

Definim els espais de Fock generals amb pes

$$F_\phi^p := \left\{ f \text{ entera} \colon f \in L_\phi^p \right\}$$

dotats de la mateixa norma que L_ϕ^p, $\|\cdot\|_{p,\phi}$.
Es pot veure que els espais de Fock $F_\phi^p \subset L_\phi^p$ son tancats en L_ϕ^p i per tant són Banach per $1 \leq p \leq +\infty$. El cas interessant $p = 2$, F_ϕ^2 és un espai de Hilbert amb el següent producte escalar

$$\langle f, g \rangle_\phi = \int_{\mathbb{C}} f(z)\overline{g(z)}\mathrm{e}^{-2\phi(z)}\mathrm{d}A(z).$$

Que està fet?

En alguns pesos concrets ja estan estudiats:

- El pes "clàssic" on $\phi(z) = \alpha |z|^2$.
- Una generalització del cas clàssic del tipus $\phi(z) = \alpha |z|^m$ per $m > 0$.
- Condicions en la mida de $\Delta\phi$. És a dir,

$$0 < m < \Delta\phi < M$$

  on $m < M$ constants.

Que està fet?

En alguns pesos concrets ja estan estudiats:

- El pes "clàssic" on $\phi(z) = \alpha |z|^2$.
- Una generalització del cas clàssic del tipus $\phi(z) = \alpha |z|^m$ per $m > 0$.
- Condicions en la mida de $\Delta\phi$. És a dir,

$$0 < m < \Delta\phi < M$$

  on $m < M$ constants.

Nova Generalització

En el nostre treball, considerem pesos on $\Delta\phi$ és una mesura doblant. Una mesura μ és doblant si

$$\mu(D(z,2r)) \leq C\mu(D(z,r))$$

per tot $z \in \mathbb{C}$ i $r > 0$. Per exemple la mesura de Lebesgue és doblant. És clar que $0 < m < \Delta\phi < M$ implica que $\Delta\phi$ és doblant. D'ara endavant, considerem que ϕ és subharmonica i tal que $\Delta\phi$ és una mesura doblant.

Nova Generalització

En el nostre treball, considerem pesos on $\Delta\phi$ és una mesura doblant. Una mesura μ és doblant si

$$\mu(D(z,2r)) \leq C\mu(D(z,r))$$

per tot $z \in \mathbb{C}$ i $r > 0$. Per exemple la mesura de Lebesgue és doblant. És clar que $0 < m < \Delta\phi < M$ implica que $\Delta\phi$ és doblant. D'ara endavant, considerem que ϕ és subharmonica i tal que $\Delta\phi$ és una mesura doblant.

Propietat del Sub-Valor Mitjà

Suposant que $\Delta\phi \geq 0$ és una mesura doblant tenim:

Sigui $1 \leq p < +\infty$. Per tot $r > 0$ existeix $C = C(r) > 0$ tal que per tot $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ i $z \in \mathbb{C}$

$$\left| f(z)\mathrm{e}^{-\phi(z)} \right|^p \leq \frac{C}{A(D^r(z))} \int_{D^r(z)} \left| f(w)\mathrm{e}^{-\phi(w)} \right|^p \mathrm{d}A(w).$$

Idea prova: Utilitzar la desigualtat clàssica i estimacions sobre ϕ.
D'ara endavant ens centrarem en el cas $p = 2$.

Propietat del Sub-Valor Mitjà

Suposant que $\Delta\phi \geq 0$ és una mesura doblant tenim:

Sigui $1 \leq p < +\infty$. Per tot $r > 0$ existeix $C = C(r) > 0$ tal que per tot $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ i $z \in \mathbb{C}$

$$\left| f(z)\mathrm{e}^{-\phi(z)} \right|^p \leq \frac{C}{A(D^r(z))} \int_{D^r(z)} \left| f(w)\mathrm{e}^{-\phi(w)} \right|^p \mathrm{d}A(w).$$

Idea prova: Utilitzar la desigualtat clàssica i estimacions sobre ϕ.

D'ara endavant ens centrarem en el cas $p = 2$.

Propietat del Sub-Valor Mitjà

Suposant que $\Delta\phi \geq 0$ és una mesura doblant tenim:

Sigui $1 \leq p < +\infty$. Per tot $r > 0$ existeix $C = C(r) > 0$ tal que per tot $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ i $z \in \mathbb{C}$

$$\left|f(z)\mathrm{e}^{-\phi(z)}\right|^p \leq \frac{C}{A(D^r(z))}\int_{D^r(z)}\left|f(w)\mathrm{e}^{-\phi(w)}\right|^p \mathrm{d}A(w).$$

Idea prova: Utilitzar la desigualtat clàssica i estimacions sobre ϕ.
D'ara endavant ens centrarem en el cas $p = 2$.

Representació Integral

Per cada $z \in \mathbb{C}$ i $f \in F^2_\phi$ l'aplicació

$$T_z \colon f \mapsto f(z)$$

és un funcional lineal i acotat en F^2_ϕ. En efecte, tenim

$$|f(z)| \leq \frac{C e^{\phi(z)}}{A(D^r(z))^{1/2}} \|f\|_{2,\phi}$$

i, per tant, $|T_z(f)| \leq C_z \|f\|_{2,\phi}$ per alguna constant $C_z > 0$.
Pel Teorema de Riesz, per cada $z \in \mathbb{C}$, $\exists!\, K_z \in F^2_\phi$ tal que

$$T_z(f) = f(z) = \langle f, K_z \rangle_\phi.$$

A més tenim $\|K_z\|_{2,\phi} = \|T_z\|$.

Representació Integral

Per cada $z \in \mathbb{C}$ i $f \in F^2_\phi$ l'aplicació

$$T_z \colon f \mapsto f(z)$$

és un funcional lineal i acotat en F^2_ϕ. En efecte, tenim

$$|f(z)| \leq \frac{C\mathrm{e}^{\phi(z)}}{A(D^r(z))^{1/2}} \|f\|_{2,\phi}$$

i, per tant, $|T_z(f)| \leq C_z \|f\|_{2,\phi}$ per alguna constant $C_z > 0$.

Pel Teorema de Riesz, per cada $z \in \mathbb{C}$, $\exists!\, K_z \in F^2_\phi$ tal que

$$T_z(f) = f(z) = \langle f, K_z \rangle_\phi.$$

A més tenim $\|K_z\|_{2,\phi} = \|T_z\|$.

Representació Integral

Per cada $z \in \mathbb{C}$ i $f \in F^2_\phi$ l'aplicació

$$T_z \colon f \mapsto f(z)$$

és un funcional lineal i acotat en F^2_ϕ. En efecte, tenim

$$|f(z)| \leq \frac{C\mathrm{e}^{\phi(z)}}{A(D^r(z))^{1/2}} \|f\|_{2,\phi}$$

i, per tant, $|T_z(f)| \leq C_z \|f\|_{2,\phi}$ per alguna constant $C_z > 0$.
Pel Teorema de Riesz, per cada $z \in \mathbb{C}$, $\exists!\, K_z \in F^2_\phi$ tal que

$$T_z(f) = f(z) = \langle f, K_z \rangle_\phi.$$

A més tenim $\|K_z\|_{2,\phi} = \|T_z\|$.

Kernel Reproductor

Així, cada funció $f \in F^2_\phi$ existeix una única representació integral

$$f(z) = \langle f, K_z \rangle_\phi = \int_{\mathbb{C}} f(w)\overline{K_z(w)}\mathrm{e}^{-2\phi(w)}\mathrm{d}A(w).$$

La funció $K(z,w) = \overline{K_z(w)}$ es diu el *nucli reproductor*. En el cas "clàssic" el nucli és explícit i es pot calcular, en el cas general no. Però tenim estimacions d'aquest nucli!

Per exemple.

$$K_z(z)^{1/2} = \|K_z\|_{2,\phi} = \|T_z\| = \sup\left\{|f(z)| : \|f\|_{2,\phi} \le 1\right\}$$
$$\lesssim \frac{\mathrm{e}^{\phi(z)}}{A(D^r(z))^{1/2}}.$$

Kernel Reproductor

Així, cada funció $f \in F^2_\phi$ existeix una única representació integral

$$f(z) = \langle f, K_z \rangle_\phi = \int_{\mathbb{C}} f(w)\overline{K_z(w)} e^{-2\phi(w)} dA(w).$$

La funció $K(z,w) = \overline{K_z(w)}$ es diu el *nucli reproductor*. En el cas "clàssic" el nucli és explícit i es pot calcular, en el cas general no. Però tenim estimacions d'aquest nucli!

Per exemple.

$$K_z(z)^{1/2} = \|K_z\|_{2,\phi} = \|T_z\| = \sup\left\{|f(z)| : \|f\|_{2,\phi} \le 1\right\}$$
$$\lesssim \frac{e^{\phi(z)}}{A(D^r(z))^{1/2}}.$$

Kernel Reproductor

Així, cada funció $f \in F^2_\phi$ existeix una única representació integral

$$f(z) = \langle f, K_z \rangle_\phi = \int_{\mathbb{C}} f(w)\overline{K_z(w)}\mathrm{e}^{-2\phi(w)}\mathrm{d}A(w).$$

La funció $K(z,w) = \overline{K_z(w)}$ es diu el *nucli reproductor*. En el cas "clàssic" el nucli és explícit i es pot calcular, en el cas general no. Però tenim estimacions d'aquest nucli!
Per exemple.

$$\begin{aligned} K_z(z)^{1/2} &= \|K_z\|_{2,\phi} = \|T_z\| = \sup\left\{|f(z)| : \|f\|_{2,\phi} \le 1\right\} \\ &\lesssim \frac{\mathrm{e}^{\phi(z)}}{A(D^r(z))^{1/2}}. \end{aligned}$$

Projecció Ortogonal

Com F^2_ϕ és un espai tancat de L^2_ϕ sabem doncs que existeix una projecció ortogonal

$$P_\phi \colon L^2_\phi \longrightarrow F^2_\phi$$

tal que $P^2_\phi = P_\phi$ i és auto-adjunta, i.e.,

$$\langle P_\phi f, g\rangle_\phi = \langle f, P_\phi g\rangle_\phi.$$

A més, tenim que P_ϕ és un operador integral

$$P_\phi f(z) = \langle P_\phi f, K_z\rangle_\phi = \langle f, K_z\rangle_\phi = \int_{\mathbb{C}} f(w)\overline{K_z(w)}\mathrm{e}^{-2\phi(w)}\mathrm{d}A(w)$$

per tot $f \in L^2_\phi$ i tot $z \in \mathbb{C}$. Es pot demostrar que és acotat en L^p_ϕ per tot p.

Projecció Ortogonal

Com F^2_ϕ és un espai tancat de L^2_ϕ sabem doncs que existeix una projecció ortogonal

$$P_\phi \colon L^2_\phi \longrightarrow F^2_\phi$$

tal que $P^2_\phi = P_\phi$ i és auto-adjunta, i.e.,

$$\langle P_\phi f, g\rangle_\phi = \langle f, P_\phi g\rangle_\phi.$$

A més, tenim que P_ϕ és un operador integral

$$P_\phi f(z) = \langle P_\phi f, K_z\rangle_\phi = \langle f, K_z\rangle_\phi = \int_{\mathbb{C}} f(w)\overline{K_z(w)}\mathrm{e}^{-2\phi(w)}\mathrm{d}A(w)$$

per tot $f \in L^2_\phi$ i tot $z \in \mathbb{C}$. Es pot demostrar que és acotat en L^p_ϕ per tot p.

Dualitat dels Espais de Fock

- Es fàcil veure que $(L^p_\phi)^*$ es pot identificar amb L^q_ϕ on $1/p + 1/q = 1$.
- I a partir d'aquí i utilitzant la projecció ortogonal P_ϕ es pot demostrar que $(F^p_\phi)^*$ es pot identificar amb F^q_ϕ.
- Això permet demostrar que la combinació finita de nuclis reproductors és dens en F^p_ϕ per tot $1 \leq p < \infty$.

Contents

Operador de Toeplitz

Donada $\varphi \in L^\infty(\mathbb{C})$, definim l'operador lineal $T_\varphi \colon F^2_\phi \longrightarrow F^2_\phi$ per

$$T_\varphi(f) = P_\phi(\varphi f).$$

Anomenem T_φ l'operador de Toeplitz en F^2_ϕ amb simbol φ.
Usant la representació integral de P_ϕ tenim

$$T_\varphi(f)(z) = \int_{\mathbb{C}} \overline{K_z(w)} f(w) \varphi(w) \mathrm{e}^{-2\phi(w)} \mathrm{d}A(w).$$

Això motiva a definir operadors de Toeplitz més generals. Sigui μ una mesura complexa

$$T_\mu(f)(z) = \int_{\mathbb{C}} \overline{K_z(w)} f(w) \mathrm{e}^{-2\phi(w)} \mathrm{d}\mu(w).$$

Operador de Toeplitz

Donada $\varphi \in L^\infty(\mathbb{C})$, definim l'operador lineal $T_\varphi \colon F^2_\phi \longrightarrow F^2_\phi$ per

$$T_\varphi(f) = P_\phi(\varphi f).$$

Anomenem T_φ l'operador de Toeplitz en F^2_ϕ amb simbol φ.
Usant la representació integral de P_ϕ tenim

$$T_\varphi(f)(z) = \int_{\mathbb{C}} \overline{K_z(w)} f(w) \varphi(w) \mathrm{e}^{-2\phi(w)} \mathrm{d}A(w).$$

Això motiva a definir operadors de Toeplitz més generals. Sigui μ una mesura complexa

$$T_\mu(f)(z) = \int_{\mathbb{C}} \overline{K_z(w)} f(w) \mathrm{e}^{-2\phi(w)} \mathrm{d}\mu(w).$$

Operador de Toeplitz

Donada $\varphi \in L^\infty(\mathbb{C})$, definim l'operador lineal $T_\varphi \colon F^2_\phi \longrightarrow F^2_\phi$ per

$$T_\varphi(f) = P_\phi(\varphi f).$$

Anomenem T_φ l'operador de Toeplitz en F^2_ϕ amb simbol φ.
Usant la representació integral de P_ϕ tenim

$$T_\varphi(f)(z) = \int_{\mathbb{C}} \overline{K_z(w)} f(w)\varphi(w) \mathrm{e}^{-2\phi(w)} \mathrm{d}A(w).$$

Això motiva a definir operadors de Toeplitz més generals. Sigui μ una mesura complexa

$$T_\mu(f)(z) = \int_{\mathbb{C}} \overline{K_z(w)} f(w) \mathrm{e}^{-2\phi(w)} \mathrm{d}\mu(w).$$

Objectiu

- L'objectiu bàsic és caracteritzar els operadors de Toeplitz T_μ en termes del símbol μ.
- Els problemes considerats són acotació, compacitat i quan pertany a la classe de Schatten.
- Com el cas clàssic, ens centrem en caracteritzar operadors de Toeplitz T_μ amb símbols positius μ.

Objectiu

- L'objectiu bàsic és caracteritzar els operadors de Toeplitz T_μ en termes del símbol μ.
- Els problemes considerats són acotació, compacitat i quan pertany a la classe de Schatten.
- Com el cas clàssic, ens centrem en caracteritzar operadors de Toeplitz T_μ amb símbols positius μ.

Objectiu

- L'objectiu bàsic és caracteritzar els operadors de Toeplitz T_μ en termes del símbol μ.
- Els problemes considerats són acotació, compacitat i quan pertany a la classe de Schatten.
- Com el cas clàssic, ens centrem en caracteritzar operadors de Toeplitz T_μ amb símbols positius μ.

Berezin Transform

Definim els nuclis reproductors com

$$k_z(w) = \frac{K_z(w)}{\|K_z\|_{2,\phi}}.$$

Sigui μ una mesura positiva. Aleshores, definim la transformada de Berezin de μ com

$$\widetilde{\mu}(z) := \int_{\mathbb{C}} |k_z(w)|^2 \, \mathrm{e}^{-2\phi(w)} \mathrm{d}\mu(w).$$

També, definim la mitjana de μ per $r > 0$ com

$$\widehat{\mu_r}(z) := \frac{\mu(D^r(z))}{A(D^r(z))}.$$

Berezin Transform

Definim els nuclis reproductors com

$$k_z(w) = \frac{K_z(w)}{\|K_z\|_{2,\phi}}.$$

Sigui μ una mesura positiva. Aleshores, definim la transformada de Berezin de μ com

$$\widetilde{\mu}(z) := \int_{\mathbb{C}} |k_z(w)|^2 \, \mathrm{e}^{-2\phi(w)} \mathrm{d}\mu(w).$$

També, definim la mitjana de μ per $r > 0$ com

$$\widehat{\mu_r}(z) := \frac{\mu(D^r(z))}{A(D^r(z))}.$$

Berezin Transform

Definim els nuclis reproductors com

$$k_z(w) = \frac{K_z(w)}{\|K_z\|_{2,\phi}}.$$

Sigui μ una mesura positiva. Aleshores, definim la transformada de Berezin de μ com

$$\widetilde{\mu}(z) := \int_{\mathbb{C}} |k_z(w)|^2 \, \mathrm{e}^{-2\phi(w)} \mathrm{d}\mu(w).$$

També, definim la mitjana de μ per $r > 0$ com

$$\widehat{\mu_r}(z) := \frac{\mu(D^r(z))}{A(D^r(z))}.$$

Mesures de Fock-Carleson

Sigui $1 \le p < +\infty$. Una mesura μ és de *Fock-Carleson* per F^p_ϕ si $\exists C > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{C}} \left| f(z) \mathrm{e}^{-\phi(z)} \right|^p \mathrm{d}\mu(z) \le C \int_{\mathbb{C}} \left| f(z) \mathrm{e}^{-\phi(z)} \right|^p \mathrm{d}A(z)$$

per tot $f \in F^p_\phi$.
Una mesura μ és *vanishing Fock-Carleson* per F^p_ϕ quan la inclusió

$$i_\mu \colon F^p_\phi \hookrightarrow L^p(\mathbb{C}, \mathrm{e}^{-p\phi} \mathrm{d}\mu)$$

és compacte.

Mesures de Fock-Carleson

Sigui $1 \leq p < +\infty$. Una mesura μ és de *Fock-Carleson* per F_ϕ^p si $\exists C > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{C}} \left| f(z) \mathrm{e}^{-\phi(z)} \right|^p \mathrm{d}\mu(z) \leq C \int_{\mathbb{C}} \left| f(z) \mathrm{e}^{-\phi(z)} \right|^p \mathrm{d}A(z)$$

per tot $f \in F_\phi^p$.
Una mesura μ és *vanishing Fock-Carleson* per F_ϕ^p quan la inclusió

$$i_\mu \colon F_\phi^p \hookrightarrow L^p(\mathbb{C}, \mathrm{e}^{-p\phi} \mathrm{d}\mu)$$

és compacte.

Operador de Toeplitz Acotat

Theorem 1

Sigui $1 \leq p \leq +\infty$ i μ una mesura de Borel positiva en $\mathbb{C}$. Aleshores, les següents afirmacions son equivalents

1. T_μ *està ben definit i acotat en* F^p_ϕ.
2. $\widetilde{\mu} \in L^\infty(\mathbb{C})$.
3. $\widehat{\mu_r} \in L^\infty(\mathbb{C})$ *per tot (o algun)* $r > 0$.
4. μ *és mesura de Fock-Carleson en* F^p_ϕ.

(1) implica (2). El cas $p = 2$ tenim que

$$|\widetilde{\mu}(z)| = |\langle T_\mu k_z, k_z \rangle_\phi| \leq \|T_\mu k_z\| \, \|k_z\| \leq C.$$

Operador de Toeplitz Acotat

Theorem 1

Sigui $1 \leq p \leq +\infty$ i μ una mesura de Borel positiva en $\mathbb{C}$. Aleshores, les següents afirmacions son equivalents

1. *T_μ està ben definit i acotat en F^p_ϕ.*
2. *$\widetilde{\mu} \in L^\infty(\mathbb{C})$.*
3. *$\widehat{\mu_r} \in L^\infty(\mathbb{C})$ per tot (o algun) $r > 0$.*
4. *μ és mesura de Fock-Carleson en F^p_ϕ.*

(1) implica (2). El cas $p = 2$ tenim que

$$|\widetilde{\mu}(z)| = |\langle T_\mu k_z, k_z \rangle_\phi| \leq \|T_\mu k_z\| \, \|k_z\| \leq C.$$

Operador de Toeplitz Compacte

Theorem 2

Sigui $1 \leq p \leq +\infty$ i μ una mesura de Borel positiva en $\mathbb{C}$. Aleshores, les següents afirmacions son equivalents

1. T_μ *està ben definit i compacte en* F^p_ϕ.
2. $\widetilde{\mu}(z) \longrightarrow 0$ *quan* $z \to \infty$.
3. $\widehat{\mu_r}(z) \longrightarrow 0$ *quan* $z \to \infty$ *per tot (o algun)* $r > 0$.
4. μ *és mesura de vanishing Fock-Carleson en* F^p_ϕ.

Operador de Toeplitz en la Classe de Schatten

Theorem 3

Sigui $1 \leq p < \infty$ *i* μ *una mesura de Borel positiva en* $\mathbb{C}$. *Aleshores, les següents afirmacions son equivalents*

1. T_μ *està ben definit i pertany a la classe de Schatten* $\mathcal{S}_p$ *de* F^2_ϕ.
2. $\widetilde{\mu} \in L^p(\mathbb{C}, \mathrm{d}\sigma)$.
3. $\widehat{\mu_r} \in L^p(\mathbb{C}, \mathrm{d}\sigma)$ *per tot (o algun)* $r > 0$.

Contents

Ara Què?

- Hi ha altres operadors que és poden considerar pels espais de Fock. L'operador de Hankel i l'operador de Hankel petit.
- En el meu treball he treballat també amb l'operador de Hankel però hi ha casos encara oberts.
- Considerar altres caracteritzacions. Per exemple considerar $\varphi \in \mathrm{BMO}^{\mathrm{p}}$.
- Estudiar més a fons els espais de Fock generals (e.g., els conjunt de zeros).
- Buscar aplicacions matemàtiques.
- Ampliar-ho a $\mathbb{C}^n$.

Gràcies!!