Teoria d'Atractors: El Model Lotka-Volterra

Juan Garcia Fuentes
jgfuentes@us.es
Universidad de Sevilla

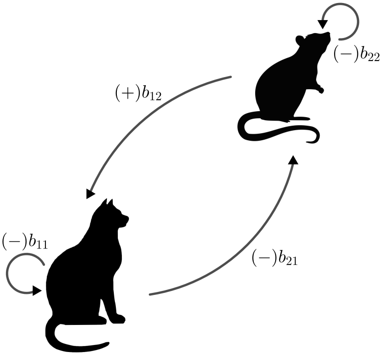
Seminari SIMBA

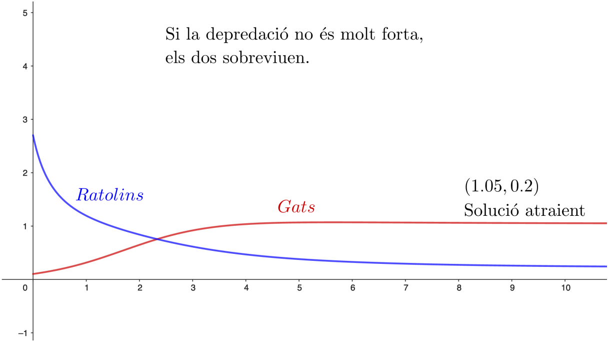
11 de Gener, 2023

Table of Contents

Lotka-Volterra Model

$$\begin{cases} u_1' = u_1(a_1 - b_{11}u_1 + b_{12}u_2) \\ u_2' = u_2(a_2 - b_{21}u_1 - b_{22}u_2) \end{cases}$$




Si la depredació no és molt forta,
els dos sobreviuen.
Ratolins
Gats
(1.05, 0.2)
Solució atraient
5
4
3
2
1
0
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

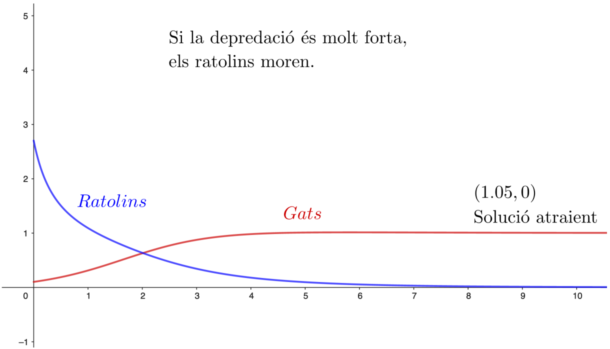

Si la depredació és molt forta,
els ratolins moren.
Ratolins
Gats
(1.05, 0)
Solució atraient
5
4
3
2
1
0
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Table of Contents

Table of Contents

Semigrups

Sigui X un espai de fases, un semigrup es una aplicació

$$S(t) : X \longrightarrow X$$

tal que

$$S(0) = I$$

$$S(t)S(s) = S(s)S(t) = S(t+s)$$

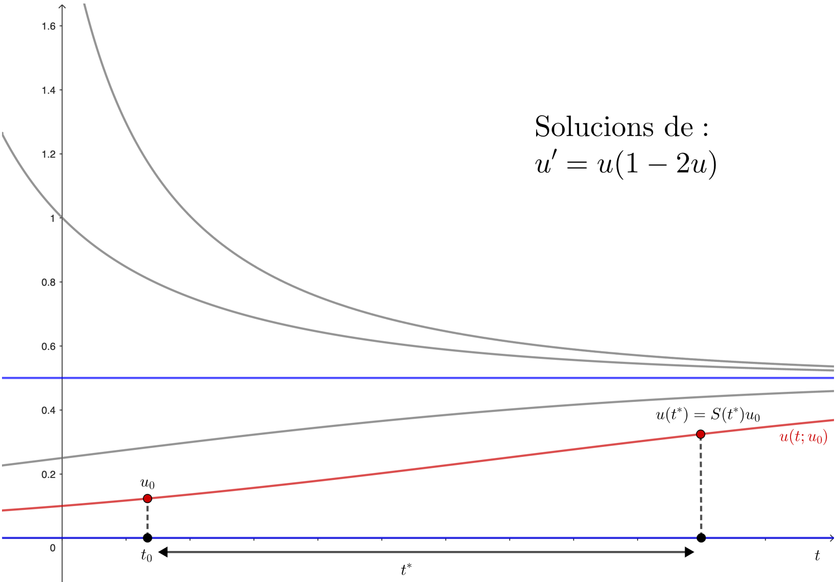
$$S(t)u_0 \text{ es continua a } u_0 \text{ i } t$$

Nota

Sigui $u(t;u_0)$ solució única amb condició inicial $u_0 \in X$ d'una equació, llavors podem definir el semigrup:

$$S(t)u_0 = u(t;u_0)$$

Exemple de Solucions d'una EDO



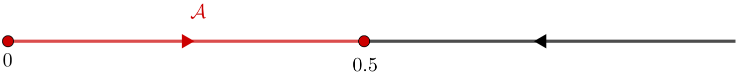
Atractor per Semigrups

Atractor Global

El conjunt $\mathcal{A} \subset X$ es l'atractor global si

- $\mathcal{A}$ es compacte,
- $\mathcal{A}$ es invariant i.e. $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ per $t \geq 0$,
- $\mathcal{A}$ es atraient i.e. $\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(S(t)B, \mathcal{A}) = 0$ per qualsevol conjunt acotat B.
- $\mathcal{A}$ es el mínim conjunt amb aquesta propietat.

Atractor Global de:
$u' = u(1 - 2u)$



Existència de l'Atractor

Definition

Un semigrup $S(t)$ es disipatiu si exiteix un conjunt compacte B_0, tal que per tot conjunt acotat B exiteix un $t_0(X)$ tal que

$$S(t)B \subset B_0 \quad \text{per tot} \quad t \geq t_0(X)$$

Theorem

Si un semigrup $S(t)$ es disipatiu amb conjunt compacte B absorvent, llavors existeix un atractor global $\mathcal{A} = \omega(B)$.

$$\omega(B) = \{y : \exists t_n \to \infty, x_n \in B \text{ amb } S(t_n)x_n \to y\}$$

Exemple d'Atractor

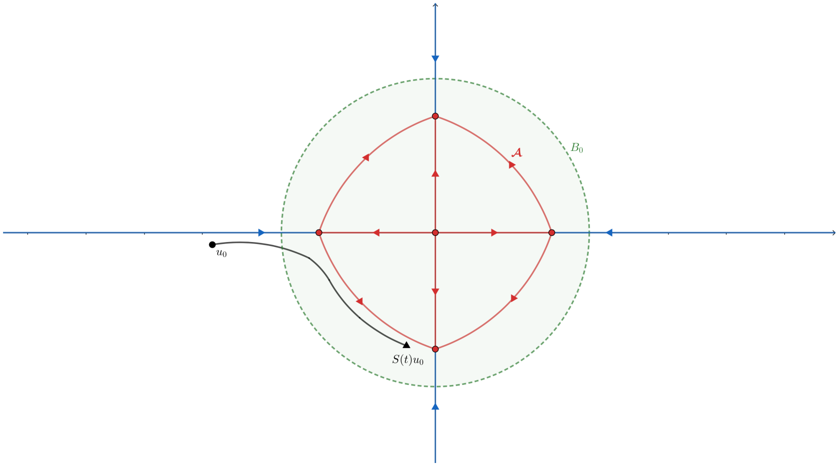


Table of Contents

Què passa quan no és dissipatiu?

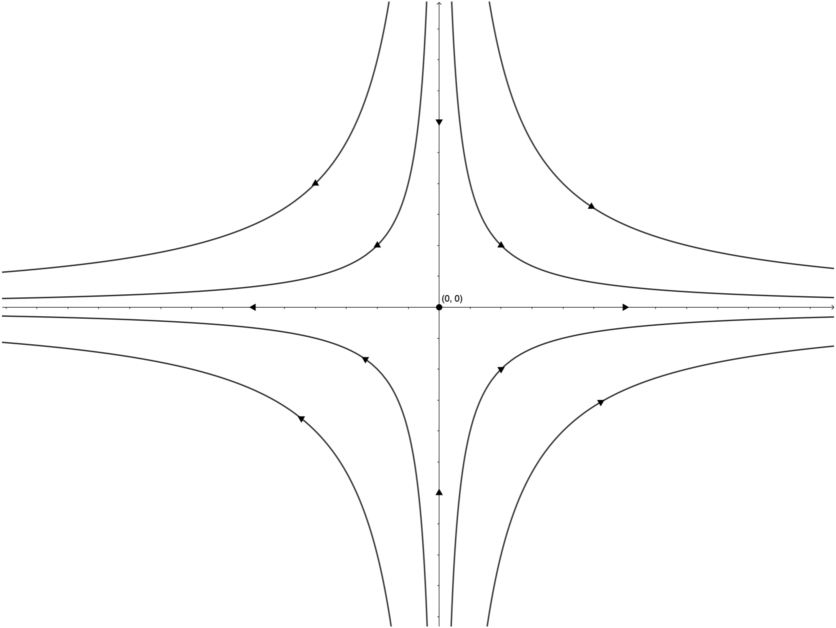
(1) S és dissipatiu si existeix un conjunt B_0 acotat tal que per tot conjunt acotat B tenim $S(t)B \subset B_0$ per tot $t \geq t_0(B)$,

(2) $\{S(t)u\}_{t\geq 0}$ és acotat, tanmateix no existeix un conjunt acotat B_0 que absorbeixi $S(t)u$.

(3) $\{S(t)u\}_{t\geq 0}$ és no acotat, i.e. és possible tenir orbites tal que $\lim_{t_n\to\infty} \|S(t_n)u\| = \infty$, o $\lim_{t\to\infty} \|S(t)u\| = \infty$. A aquesta situació se li diu grow-up i els seus semigrups són coneguts com feblement no acotat.

(4) $S(t)u$ pot no estar definit per tot $t \in \mathbb{R}$ y $\lim_{t\to t_0} \|S(t)u\| = \infty$. A aquesta situació se li diu com blow-up.

El concepte d'atractor no acotat és una extensió del concepte d'atractor global en el casos que el semigrup compleixi (1) i (3) simultàniament (depenent de la condició inicial).


(0, 0)

Article sobre Atractor no Acotats

New!!! Open Access!!!

Banaśkiewicz, J., Carvalho, A.N., Garcia-Fuentes, J., Piotr, K. *Autonomous and Non-autonomous Unbounded Attractors in Evolutionary Problems.* J Dyn Diff Equat (2022).

Table of Contents

Equacions Diferencials no Autònomes

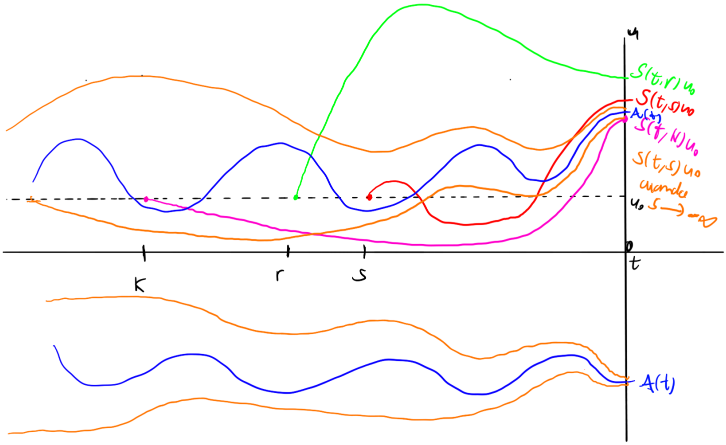
Cas Autònom		Cas No Autònom
$y' = y(a - b * y)$	$\longrightarrow$	$y' = y(a(t) - b(t) * y)$
$y' = \Delta y + f(y)$	$\longrightarrow$	$y' = \Delta y + f(t, y)$

Processos

Un procés en X és una família d'aplicacions $\{S(t,s) : t \geq s\}$ continues tal que

1. $S(t,t) = I$, per tot $t \in \mathbb{R}$.
2. $S(t,s) = S(t,\tau)S(\tau,s)$, per tot $t \geq \tau \geq s$.
3. $(t,s,x) \mapsto S(t,s)x$ és continua, $t \geq s$, $x \in X$.

Non Autnomous Evolution



Forward Attractor per Processos

Forward attractor

Una família $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ és el forward attractor si

- $\mathcal{A}(t)$ és compacte per cada $t \in \mathbb{R}$.
- $\mathcal{A}(t)$ és invariant respecte $S(\cdot,\cdot)$, i.e.

$$S(t,\tau)\mathcal{A}(\tau) = \mathcal{A}(t) \quad \text{per tot} \quad t,\tau \in \mathbb{R} \quad \text{amb} \quad t \geq \tau.$$

- Forward atrau conjunts acotats de X per condició inicial $s \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(S(t,s)B, \mathcal{A}(t)) = 0,$$

- $\mathcal{A}(t)$ és la família minimal de conjunts acotats que compleixen l'última condició.

Pullback Attractor per Processos

Pullback attractor

Una família $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ és el pullback attractor si

- $\mathcal{A}(t)$ és compacte per cada $t \in \mathbb{R}$.
- $\mathcal{A}(t)$ és invariant respecte $S(\cdot,\cdot)$, i.e.

$$S(t,\tau)\mathcal{A}(\tau) = \mathcal{A}(t) \quad \text{per tot} \quad t,\tau \in \mathbb{R} \quad \text{amb} \quad t \geq \tau.$$

- Pullback atrau conjunts acotats de X en temps t:

$$\lim_{s\to-\infty} \operatorname{dist}(S(t,s)B, \mathcal{A}(t)) = 0,$$

- $\mathcal{A}(t)$ és la família minimal de conjunts acotats que compleixen l'última condició.

Table of Contents

Lotka-Volterra Model

$$u_i' = u_i\left(a_i - b_{ii}u_i - \sum_{j\neq i} b_{ij}u_j\right) \quad \text{per} \quad i \in \{1, ..., n\}.$$

- a_i creixement intrínsec de l'espècie i.
- b_{ii} competició de la propia espècie per l'espai, els aliments...
- b_{ij} interacció entre l'espècie i i l'espècie j.
  - Cas competitiu si $b_{ij} \geq 0$ per tot $i \neq j$.
  - Cas cooperatiu si $b_{ij} \leq 0$ per tot $i \neq j$.

Notació

A vegades el model s'escriurà com:

$$\dot{u} = u(a - Bu).$$

Table of Contents

Volem calcular els punts d'equilibri u^* que compleixen:

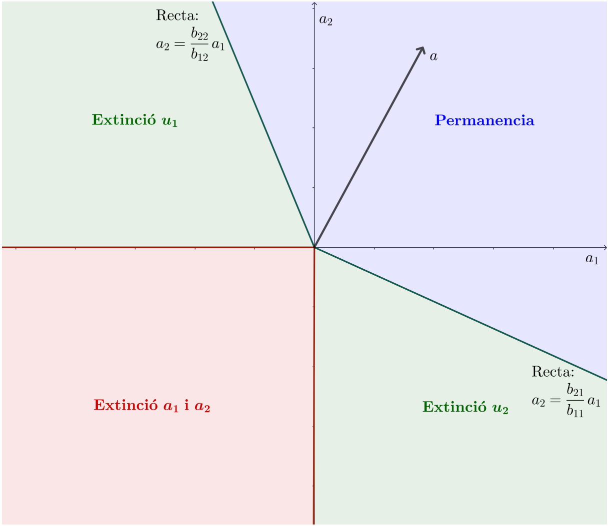
- $u_i^* \geq 0$.
- $u_i^*(a_i - \sum_{j=1}^N b_{ij} u_j^*) = 0, \quad i = 1, ..., n.$

Existeix la teoria LCP que diu quin és el punt d'equilibri estable depenent de a quin con

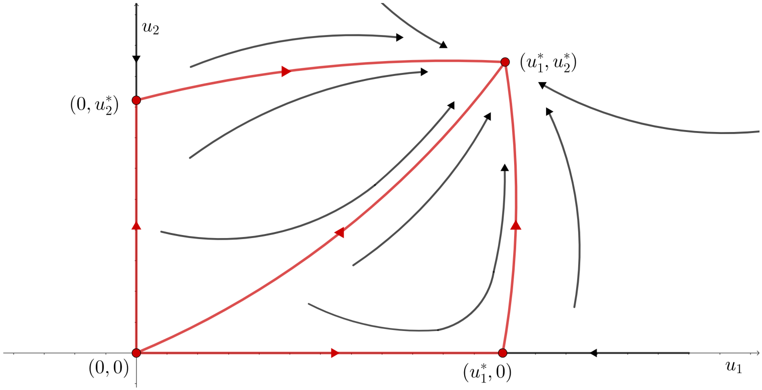
$$pos(\mathcal{M}_{\cdot 1}, ..., \mathcal{M}_{\cdot N}) = \{y : y = \alpha_1 \mathcal{M}_{\cdot 1} + ... + \alpha_N \mathcal{M}_{\cdot N}; i = 1, ..., N\}$$

es troba el vector a, on $\mathcal{M}_{\cdot i} = \{I_{\cdot i}, B_{\cdot i}\}$.

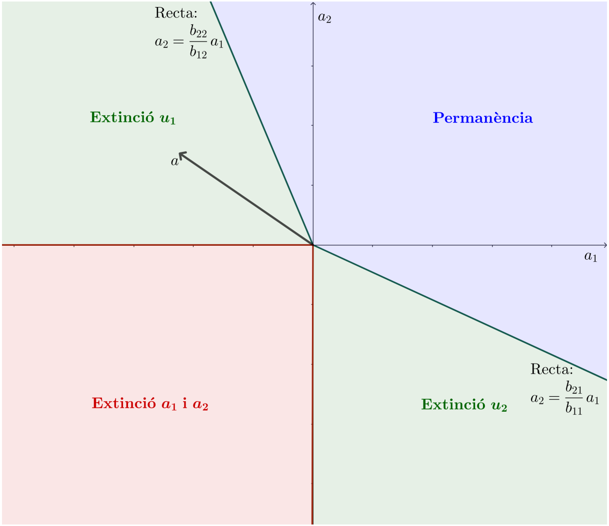
Cons en Dimensió 2



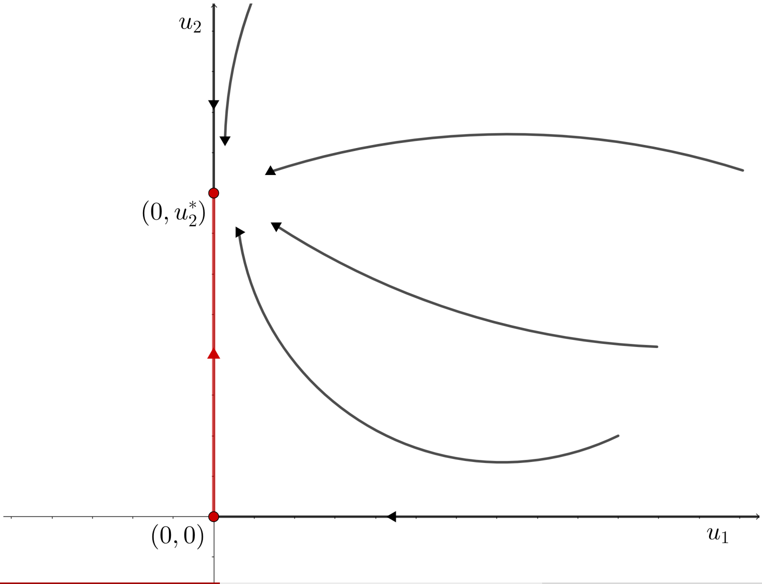
Espai de Fase amb Permanència



Cons en Dimensió 2



Espai de Fase amb Extinció u_1



Remark

Per obtenir estabilitat la matriu $-B$ *ha de ser* S_w.

Remark

Si B *és diagonal dominant, llavors* $-B \in S_w$*:existeixen* $c_1, ..., c_N > 0$ *tal que*

$$c_i b_{ii} > \sum_{i \neq j}^{N} |b_{ij}| c_j, \quad i = 1, ..., N.$$

Theorem

Suposem que $-B \in S_w$ *i* $E = \{u_1^*, ..., u_m^*\} \subset \mathbb{R}_+^n$ *és el conjunt de punts d'equilibri de (LV-n). Llavors el sistema (LV-n) és un sistema gradient, i per tant per tot* $z \in \mathcal{A} \setminus E$*, siguent* $\mathcal{A}$ *l'atractor global de (LV-n), existeixen* $i, j \in \{1, ..., m\}$ *tal que*

$$\lim_{t \to -\infty} \|u(t;z) - u_j^*\| = 0 \quad i \quad \lim_{t \to \infty} \|u(t;z) - u_i^*\| = 0$$

Table of Contents

Ara els paràmetres de creixement intrínsec i d'interacció entre espècies depenen del temps:

$$u_i' = u_i\left(a_i(t) - b_{ii}(t)u_i - \sum_{j\neq i} b_{ij}(t)u_j\right) \quad \text{per} \quad i \in \{1, ..., n\}.$$

Nova condició sobre la matriu:

$$\left(c_i b_{ii}(t) + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} c_j b_{ij}(t)\right)^L \geq \delta > 0 \quad \text{for all } i = 1, ..., n, \qquad (H)$$

Considerem el cas cooperatiu, així que tenim que:

$$b_{ij}(t) \leq 0 \quad \text{per } i \neq j, \text{ i per tot } t \in \mathbb{R}.$$

A més:

$$b_{ii}(t) > 0 \ \text{, per tot } t \in \mathbb{R}.$$

Condicions per Permanència

$$\bar{d}_i b_{ii}(t) \leq a_i(t) \leq d_i b_{ii}(t) + \sum_{j \neq i} d_j b_{ij}(t) \quad \text{for all } i = 1, \dots, n. \qquad (A)$$

Theorem

Assumint (A) *i* (H)*, existeix una única trajectoria positiva completa* u^* *separada de zero i infinit. Aquesta trajectoria satisfà* $\bar{d}_i \leq u_i^* \leq d_i$ *per tot* $t \in \mathbb{R}$*. A més, per tota solució* u *de (LV-n) tal que* $u(t_0) > 0$ *és compleix la següent convergència*

$$\lim_{t \to \infty} |u(t) - u^*(t)| \to 0.$$

Condicions per Extinció

$$\begin{cases} b_{ii}(t)\bar{d}_i + \varepsilon \leq a_i(t) \leq b_{ii}(t)d_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}(t)(d_j + \theta c_j) - \varepsilon \text{ for } i \in I \\ a_i(t) \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}(t)(d_j + \theta c_j) - \varepsilon \text{ for } i \in J \end{cases} \tag{B}$$

Theorem

Assumint (B) i (H), existeix una única trajectoria no negativa completa u^* que satisfà $\bar{d}_i \leq u_i^* \leq d_i$ per $i \in I$, i $u_i^* \equiv 0$ per $i \in J$, per tot $t \in \mathbb{R}$. A més, per tota solució u de (LV-n) tal que $u(t_0) > 0$ és compleix la següent convergència

$$\lim_{t\to\infty} |u(t) - u^*(t)| \to 0.$$

Cas 2D

Permanència

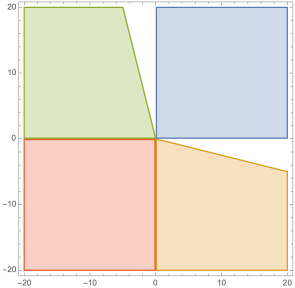
$$\begin{cases} \overline{d}_1 b_{11}(t) \leq a_1(t) \leq d_1 b_{11}(t) + d_2 b_{12}(t), \\ \overline{d}_2 b_{22}(t) \leq a_2(t) \leq d_1 b_{21}(t) + d_2 b_{22}(t), \end{cases}$$

Extinció d'una espècie

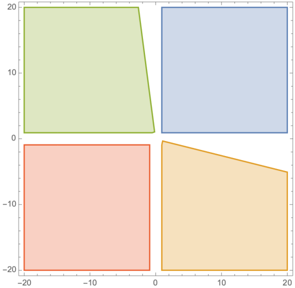
$$\begin{cases} b_{11}(t)\overline{d}_1 + \varepsilon \leq a_1(t) \leq b_{11}(t) d_1 + b_{12}(t)(d_2 + \theta c_2) - \varepsilon, \\ a_2(t) \leq b_{21}(t)(d_1 + \theta c_1) - \varepsilon, \end{cases}$$

Extinció de les dues espècies

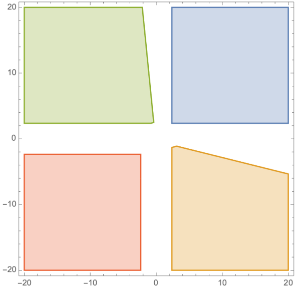
$$\begin{cases} a_1(t) \leq b_{12}(t)(d_2 + \theta c_2) - \varepsilon, \\ a_2(t) \leq b_{21}(t)(d_1 + \theta c_1) - \varepsilon, \end{cases}$$



20
10
0
−10
−20
−20 −10 0 10 20



20
10
0
−10
−20
−20 −10 0 10 20

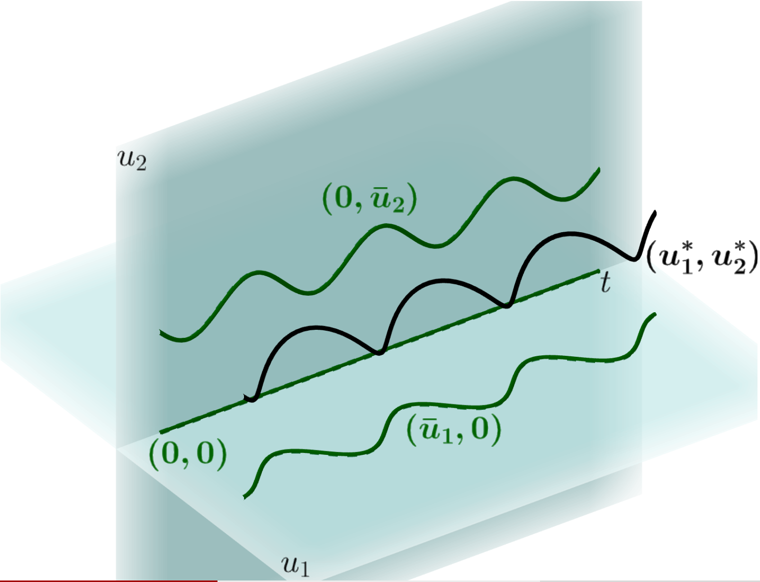


20
10
0
−10
−20
−20 −10 0 10 20

Lemma

Existeix una funció $u^* = (u_1^*, u_2^*)$ *definida per* $t \in \mathbb{R}$, *solució completa de (LV-2) tal que* $\bar{d}_i \leq u_i \leq d_i$ *per* $i = 1, 2$. *Aquesta és l'única trajectòria completa acotada lluny de 0 i infinit en ambdues variables També existeixen les funcions* $(\widehat{u}_1, 0)$, $(0, \widehat{u}_2)$ *i* $u(t) = (0, 0)$ *definides per* $t \in \mathbb{R}$ *que són solucions completes de (LV-2), tal que* $\bar{d}_i \leq \widehat{u}_i \leq d_i$ *for* $i = 1, 2$.

Solucions Globals en Cas de Permanència



Lemma

Si la funció $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *és una solució de (LV-2) amb* $u_1(t_0) \geq 0$ *i* $u_2(t_0) = 0$, *llavors és compleix una de les següents posibilitats:*

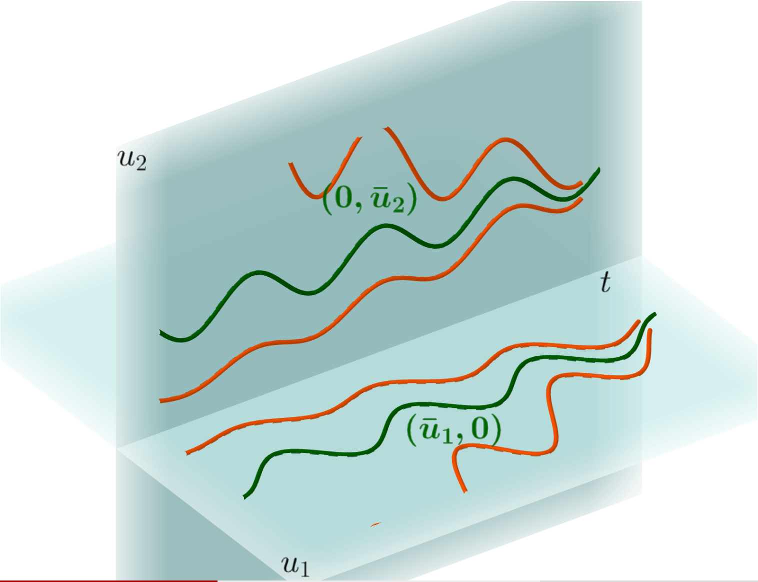
(a) $u(t) = (0, 0)$ *per tot* $t \in \mathbb{R}$,

(b) $u = (\bar{u}_1, 0)$,

(c) *si* $u_1(t_0) \in (0, \bar{u}_1(t_0))$ *llavors* $\lim_{t\to-\infty} u_1(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} \bar{u}_1(t) - u_1(t) = 0$ *i* $u_2(t) = 0$ *for* $t \in \mathbb{R}$,

(d) *si* $u_1(t_0) > \bar{u}_1(t_0)$ *llavors* $\lim_{t\to-\infty} u_1(t) = \infty$, $\lim_{t\to\infty} u_1(t) - \bar{u}_1(t) = 0$, *i* $u_2(t) = 0$ *per* $t \in \mathbb{R}$.

Solucions semiestables



Theorem

Existeix una trajectòria de (LV-2) anomenada $z = (z_1, z_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *tal que*

$$\lim_{s \to -\infty} |(z_1(s), z_2(s)) - (\widehat{u}_1(s), 0)| = 0.$$

i

$$\lim_{s \to \infty} |(z_1(s), z_2(s)) - (u_1^*(s), u_2^*(s))| = 0.$$

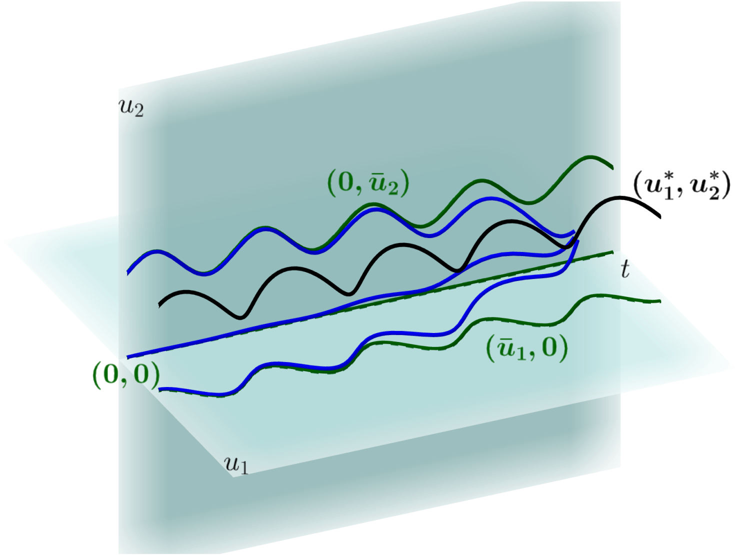
Resultat anàleg per $(0, \widehat{u}_2)$*. És més, existeix una trajectòria de (LV-2) anomenada* $y = (y_1, y_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *tal que*

$$\lim_{s \to -\infty} |(y_1(s), y_2(s))| = 0.$$

i

$$\lim_{s \to \infty} |(y_1(s), y_2(s)) - (u_1^*(s), u_2^*(s))| = 0.$$

Conexions Heterocliniques



Article sobre Atractor per Lotka-Volterra No-Autònom

Future work!!! Stay Tuned!!!

Langa, J.A., Garcia-Fuentes, J., Piotr, K., Suárez, A. *Characterization of attractors for non-autonomous Lotka-Volterra cooperative systems*.

Moltes gràcies!!!