Geometría y topología de espacios de Teichmüller

Alejandro García Sánchez

Universidad Autónoma de Barcelona.
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas.

20 de Marzo de 2024

Índice

Preliminares

Conforme.	**Compleja. (s.R.)**	Riemanniana.
Diferenciable, Orientada.		Diferenciable, Orientada.

Superficie topológica (cerrada).

S.R. cociente

Definición (Cociente, órbifold)

- $R = \tilde{R}/\Gamma$, $\Gamma < Aut(\tilde{R})$.
- s.R. cociente $\Leftrightarrow$ acción libre y propiamente discontinua.
- Órbifold $\Leftrightarrow$ acción propiamente discontinua.

Móduli de superficies de Riemann cerradas

Teorema (Uniformización)

s.R. (salvo isomorfismo) simplemente conexas: $\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}$ *y* H.

Corolario

Recubridor universal $\Rightarrow \hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}$ *y* H.

Representación

Teorema (Representación)

$R = \tilde{R}/\Gamma$, *donde:*

- $\tilde{R}$ *es el recubridor universal,*
- $\Gamma < Aut(\tilde{R})$,
- $\Gamma \curvearrowright \tilde{R}$ *libre y prop. disc.*
- Γ *único salvo conjugación.*
- $\Gamma \cong \pi_1(R)$.

Observación

Si $g \geq 2$, Γ se dice modelo Fuchsiano.

Automorfismos de $\mathbb{C}, \hat{\mathbb{C}}, H$

Teorema

- $Aut(\mathbb{C}) = \{z \to az + b : a \neq 0\}$.
- $Aut(\hat{\mathbb{C}}) \cong PSL(2, \mathbb{C}) =$ *Möb*.
- $Aut(H) \cong PSL(2, \mathbb{R}) < PSL(2, \mathbb{C})$.

Corolarios

Definición (Móduli)

$M_g := \{s.R.$ cerradas de género $g\}/\sim$.

Corolario

- $M_0 = \{[\hat{\mathbb{C}}]\}$.
- $M_1 = \{\mathbb{C}/\Gamma : \Gamma \cong \mathbb{Z}^2\}/$(*conjugación de* Γ *por traslación*).
- $g \geq 2 \Rightarrow M_g = \{H/\Gamma : \Gamma < PSL(2,\mathbb{R}), \Gamma \curvearrowright H$ *libre y prop. disc.*$\}/\sim$.

M_1 y T_1

Proposición

- *Todo retículo* $\Gamma \cong \mathbb{Z}^2$ *es conjugado de algún* $\Gamma_\tau := \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$, $\tau \in H$.
- $R_\tau \cong R_{\tau'} \Leftrightarrow \tau' \in PSL(2,\mathbb{Z})\tau$.
- $PSL(2,\mathbb{Z}) \curvearrowright H$ *prop. disc.*

Teorema

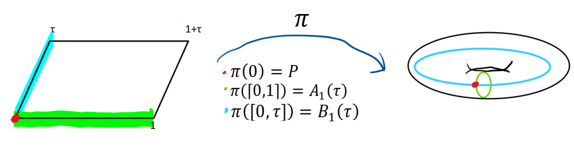
$M_1 = H/PSL(2,\mathbb{Z})$ *es un órbifold.*
Definiendo $T_1 = H$ *y* $Mod_1 = PSL(2,\mathbb{Z})$, $M_1 = T_1/Mod_1$.

T_g y $T(R)$

Caso $g = 1$.

Definición (T_1)

- Marca Σ_p sobre R: elección de un sistema de generadores de $\pi_1(R)$.
- Marca 'natural' en R_τ: $\Sigma(\tau) := \{A_1(\tau), B_1(\tau)\}$.



- $\Sigma_p \equiv \Sigma_{p'} \Leftrightarrow T_{pp'}(\Sigma_p) = \Sigma_{p'}$, $T_{pp'} : \pi_1(R,p) \cong \pi_1(R,p')$.
- $(R,\Sigma) \equiv (R',\Sigma') \Leftrightarrow \exists h : R \cong R'$ t.q. $h_*(\Sigma) \equiv \Sigma'$.
- $T_1 := \{(R,\Sigma)\}/\equiv$. Cada $[R,\Sigma]$ es un toro marcado.

Teorema

$T_1 = \{[R_\tau, \Sigma(\tau)] : \tau \in H\} \leftrightarrow H$.

Género arbitrario

Definición (Marca sobre una s.R. de género g)

- Sistema canónico de generadores (s.c.g.) $\Sigma_p := \{[A_i],[B_i]\}_{i=1}^{g}$ de $\pi_1(p,R)$ t.q.

$$\pi_1(p,R) =< \Sigma_p : \Pi_{i=1}^{g}\big[[A_i],[B_i]\big] = 1 > .$$

- Una marca es una elección del s.c.g.

Definición (Marca vía difeomorfismos)

- Fijemos una s.R. R de género g. $\forall S$ s.R. de género g $\exists f \in Dif_+(R,S)$.
- $(S_1,f_1) \equiv (S_2,f_2) \Leftrightarrow \exists h : S_1 \cong S_2$ t.q. h homót. $f_2 \circ f_1^{-1}$.
- $T(R) := \{(S,f)\}/\equiv$. Cada $[S,f]$ es una s.R. marcada.

$T_g \leftrightarrow T(R)$

Teorema

- *Fijemos R s.R. de género g.*
- *Fijemos una marca Σ en R.*
- *La aplicación*

$$\begin{aligned} \phi_\Sigma : T(R) &\longrightarrow T_g \\ [S, f] &\longrightarrow [S, f_*(\Sigma)] \end{aligned}$$

es una biyección.

Coeficientes de Beltrami

Definición (Coeficiente de Beltrami)

- $f \in Dif_{+}(R,S)$.
- Atlas $\{(U_j, z_j)\}_{j\in J}$ sobre R.
- Coeficiente de Beltrami de f respecto de (U_j, z_j):

$$\mu_j := \frac{F_{\bar{z}}}{F_z},\ F \text{ expresión local de } f \text{ en } U_j.$$

- Coeficiente de Beltrami de f: $\mu_f := \{\mu_j\}_{j\in J}$.

Teorema

Los coeficientes de Beltrami son diferenciales de tipo $(1,1)$.

Aplicaciones cuasiconformes (cc).

Definición (Cuasiconforme)

$f: U \subset \mathbb{C} \to V \subset \mathbb{C}$ entre abiertos de $\mathbb{C}$, $f \in Hom_+$, t.q.

- $f_x, f_y \in L^1_{loc}$.
- $|\mu_f| \leq 1$ c.t.p. en U.

es un homeo. cuasiconforme.

Observación

- Si $f \in Dif_+$, exigimos en todo punto para ser dif. cc.
- Si f es una aplicación entre s.R., miramos expresiones locales.
- Suave $<$ cc $<$ holomorfa.

Topología para $T(R)$

Observación

- $B(R)$ es Banach con $||.||_\infty$.
- f cc $\Rightarrow \mu_f \in B(R)_1$.

Observación

- $Dif_0(R) \triangleleft Dif_+(R)$.
- $Dif_+(R) \curvearrowright B(R)_1$ vía

$$\omega * \mu_f = \mu_{f\circ\omega^{-1}}, \ \forall \omega \in Dif_+(R), \mu_f \in B(R)_1.$$

Teorema

$$M_g \cong B(R)_1 / Dif_+(R), \qquad T(R) \cong B(R)_1 / Dif_0(R).$$

$$M_g \cong T(R)/Mod(R), \qquad Mod(R) := Dif_+(R)/Dif_0(R).$$

Espacios de Fricke

Grupos Fuchsianos.

Definición (Grupo Fuchsiano)

$\Gamma < Aut(H)$ es Fuchsiano si es discreto en $Aut(H)$.

Teorema

- $\Gamma < Aut(H)$ *es Fuchsiano* $\Leftrightarrow \Gamma \curvearrowright H$ *prop. disc.*
- ***Toda S.R. con*** $g \geq 2$ ***es hiperbólica***.

Teorema (Modelo Fuchsiano normalizado)

- Γ *modelo Fuchsiano de* R*, s. R. cerrada marcada* $[R, \Sigma]$.
- $\exists$ *condiciones de normalización únicas para* Σ *que fijan* Γ.

$F_g \leftrightarrow T_g,\ g \geq 2.$

Teorema

- *S.c.g.* $\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^{g}$ *sobre el grupo Fuchsiano norm. de* $[R,\Sigma]$*:*

$$\alpha_j := \frac{a_j z + b_j}{c_j z + d_j},\ a_j, b_j, c_j, d_j \in \mathbb{R},\ c_j > 0, a_j d_j - b_j c_j = 1,$$
$$\beta_j := \frac{a'_j z + b'_j}{c'_j z + d'_j},\ a'_j, b'_j, c'_j, d'_j \in \mathbb{R},\ c'_j > 0, a'_j d'_j - b'_j c'_j = 1,$$

  para $j = 1, \ldots, g-1$*.*

- *Coordenadas de Fricke:*

$$\mathscr{F}_g : T_g \longrightarrow \mathbb{R}^{6g-6}$$
$$[R,\Sigma] \longrightarrow (a_1, c_1, d_1, a'_1, c'_1, d'_1, \ldots, a_{g-1}, c_{g-1}, d_{g-1}, a'_{g-1}, c'_{g-1}, d'_{g-1}),$$

- $\mathscr{F}_g$ *es inyectivo.*

Estructura compleja de T_g

Definición (Homeo. canónico cc de $\hat{\mathbb{C}}$)

Homeo. $f:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ t.q.

- Es cc sobre $\mathbb{C}$.
- Fija $0,1,\infty$.

Definición (Espacio de Teichmüller de Γ)

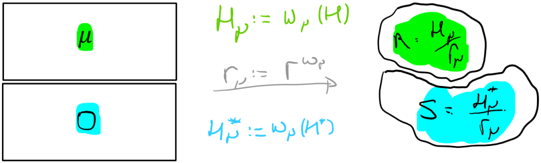
- $QC := \{\tilde{f}:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}:$ es un homeo. canónico cc de $\hat{\mathbb{C}}\}$.
- $QC(\Gamma) := \{\tilde{f}\in QC|\ \Gamma^{\tilde{f}}$ es Fuchsiano$\}$.
- $w_1, w_2 \in QC(\Gamma)$ son $\equiv\ \Leftrightarrow\ w_1|_{\mathbb{R}} = w_2|_{\mathbb{R}}$.
- $T(\Gamma) := QC(\Gamma)/\sim$.

Proposición

- $B(H,\Gamma) = \{\mu \in B(H) |\ \mu = (\mu \circ \gamma)\frac{\gamma'}{\gamma}, c.t.p.\ \text{en}\ H, \forall \gamma \in \Gamma\}$
- $\tilde{\mu}$ *extiende* μ *vía* $\tilde{\mu}|_{H^*} = 0.$
- $B(H,\Gamma)_1 \hookrightarrow QC : \mu \hookrightarrow w_\mu := \tilde{f}^{\tilde{\mu}}.$

Teorema

R, S de igual género $g \geq 2$ pueden ser uniformizadas simultáneamente.



Estructura compleja sobre $T_\beta(\Gamma)$

Definición (Espacio β de Teichmüller de Γ)

- $w_\mu \equiv w_\nu \Leftrightarrow (w_\mu)|_{H^*} = (w_\nu)|_{H^*}$.
- $T_\beta(\Gamma) := \{w_\mu : \mu \in B(H,\Gamma)_1\}/\equiv$.

Teorema

- *Dado* $\mu \in B(H,\Gamma)_1$, $\varphi_\mu(z) := \{w_\mu, z\}$, $\forall z \in H^*$ *está en* $A_2(R^*)$.
- *Inmersión de Bers:* $\mathscr{B} : T_\beta(\Gamma) \hookrightarrow A_2(H^*/\Gamma) : [w_\mu] \hookrightarrow \varphi_\mu$.
- T_g *es una variedad compleja de dimensión* $3g-3$.
- M_g *es un órbifold (complejo).*

Comentarios finales

Algunos desarrollos

- Estructura simpléctica (Kähler) y de Poisson de T_g.
- *Teichmüller* de estructuras $\mathbb{CP}^1$.
- Variedades de representaciones y Higher Teichmüller Theory:
  - $PSL(2,\mathbb{R})$: la componente de Hitchin.
  - $PSL(3,\mathbb{R})$: Choi-Goldman y las estructuras reales proyectivas convexas.
  - ¿$PSL(4,\mathbb{R})$?
- Teichmüller sigue activo: Mirzakhani.

Fin

Algunos libros:

- An Introduction to Teichmüller Spaces (Imayoshi, Taniguchi).
- Geometry and Topology of Manifolds: Surfaces and Beyond (Muñoz, González-Prieto, Rojo).
- Geometric structures on manifolds (Goldman).
- An Introduction to Geometric Topology (Martelli).

Agradecimientos:
Ernesto Girondo Sirvent (UAM-ICMAT)

Contacto:

- alejandro.garcia.sanchez@uab.cat
- C1/-138, Facultad de Ciencias, UAB.